УДК 517.5

*А. И. Степанец*

# О поведении последовательностей частных сумм Фурье непрерывных функций вблизи точек их расходимости

Пусть $f(x)$ — $2\pi$-периодическая непрерывная функция ($f \in C_{2\pi}$);

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

— ее ряд Фурье; $S_n(f; x)$ — частная сумма порядка $n$ этого ряда (сумма Фурье).

Пусть $x_0$ — точка, в которой ряд (1) расходится. Хорошо известно [1], что существуют функции $f \in C_{2\pi}$, для которых множество таких точек на периоде может иметь мощность континуума, при этом последовательности $\{S_n(f; x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ могут быть как ограниченными, так и неограниченными.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $f \in C_{2\pi}$ и $s$ — частичный (конечный или бесконечный) предел последовательности $\{S_n(f; x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, отличный от значения $f(x_0)$; $\Delta_s$ — открытый интервал с концами $y = s$ и $y = 2f(x_0) - s$; $\{S_{n_k}(f; x)\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность последовательности $\{S_n(f; x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой*

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(f; x_0) = s. \tag{2}$$

*Тогда для любого значения $c \in \Delta_s$ можно указать по крайней мере две последовательности $\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ точек, лежащих слева от точки $x_0$ ($x_k^{(1)}, x_k^{(2)} < x_0$), $k = 1, 2, \ldots$, и две последовательности $\{x_k^{(3)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_k^{(4)}\}_{k=1}^{\infty}$ точек, лежащих справа от точки $x_0$ ($x_k^{(3)}, x_k^{(4)} > x_0$), $k = 1, 2, \ldots$, которые сходятся к точке $x_0$:*

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(1)} = \lim_{k\to\infty} x_k^{(2)} = \lim_{k\to\infty} x_k^{(3)} = \lim_{k\to\infty} x_k^{(4)} = x_0, \tag{3}$$

*и, кроме того, для них выполняются равенства*

$$S_{n_k}(f; x_k^{(1)}) = c, \qquad S_{n_k}(f; x_k^{(2)}) = 2f(x_0) - c, \tag{4}$$

$$S_{n_k}(f; x_k^{(3)}) = c, \qquad S_{n_k}(f; x_k^{(4)}) = 2f(x_0) - c \tag{4'}$$

*при всех $k \geqslant k_0$, где $k_0$ — некоторое натуральное число.*

Доказательство. Отправным моментом в наших рассуждениях будет хорошо известный факт, что для любой функции $f \in C_{2\pi}$ ее суммы Рогозинского $R_n(f; x) = (S_n(f; x - \pi/2n) + S_n(f; x + \pi/2n))/2$ сходятся к ней равномерно (см., напр., [2]):

$$|f(x) - R_n(f; x)| \leqslant A\omega(f; 1/n). \tag{5}$$

Здесь $\omega(f; t)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, а $A$ — абсолютная постоянная. Учитывая (5), находим $|2f(x_0) - S_n(f; x_0 - \pi/n) - S_n(f; x_0)| = 2|f(x_0 - \pi/2n) - R_n(x_0 - \pi/2n) + f(x_0) - f(x_0 - \pi/2n)| \leqslant 2A\omega(f; 1/n) + 2\omega(f; \pi/2n) < A_1\omega(f; 1/n)$, где $A_1$ — абсолютная постоянная.

Отсюда заключаем, что при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$S_n(f; x_0 - \pi/n) = 2f(x_0) - S_n(f; x_0) + \gamma_n^{(1)}, |\gamma_n^{(1)}| < A_1 w(f; 1/n). \tag{6}$$

Аналогично при любом натуральном $n$ получаем

$$S_n(f; x_0 + \pi/n) = 2f(x_0) - S_n(f; x_0) + \gamma_n^{(1)}, \ |\gamma_n^{(1)}| < A_1\omega(f; 1/n). \tag{6'}$$

Предположим для определенности, что $f(x_0) < s$. Из дальнейшего будет видно, что это условие не принципиально. В этом случае, очевидно, $\Delta_s = (2f(x_0) - s, s)$. Возьмем на интервале $\Delta_s$ произвольную точку $c$ и вначале будем считать, что

$$f(x_0) < c < s. \tag{7}$$

Полагая $\alpha = (c + s)/2$ и пользуясь соотношением (2), выберем $k_1$, такое, что при всех $k \geqslant k_1$

$$S_{n_k}(f; x_0) > \alpha. \tag{8}$$

Далее, найдем число $k_2$ из условия

$$A_1\omega(f; 1/n_k) < \alpha - c \overset{\text{def}}{=} \varepsilon, \quad k \geqslant k_2. \tag{9}$$

Тогда при всех $k \geqslant k_3 \overset{\text{def}}{=} \max(k_1, k_2)$ согласно соотношениям (6), (8), (9) получим

$$S_{n_k}(f; x_0 - \pi/n_k) = 2f(x_0) - S_{n_k}(f; x_0) + \gamma_{n_k}^{(1)} < 2f(x_0) - \alpha + \gamma_{n_k}^{(1)} =$$
$$= 2f(x_0) - c - \varepsilon - \gamma_{n_k}^{(1)} < 2f(x_0) - c. \tag{10}$$

Рассматривая функции $S_{n_k}(f; x)$, видим, что при всех $k \geqslant k_3$ в силу неравенств (8) и (10) в точках $x = x_0 - \pi/n_k$ они принимают значение, меньшее $2f(x_0) - c$, а в точке $x = x_0$ — большее $c$. Отсюда в силу их непрерывности следует, что на интервале $(x_0 - \pi/n_k, x_0)$ будут точки $x_k'$ и $x_k''$, в которых выполняются равенства

$$S_{n_k}(x_k^{(1)}) = c, \qquad S_{n_k}(x_k^{(2)}) = 2f(x_0) - c.$$

Полагая $x_k' = x_k^{(1)}$, $x_k'' = x_k^{(2)}$, видим, что последовательности $\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$ — искомые.

Последовательности $\{x_k^{(3)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{x_k^{(4)}\}_{k=1}^{\infty}$ следует строить таким же образом, только для получения аналога неравенства (10) необходимо пользоваться соотношением (6). Итак, если выполнено условие (7), теорема доказана.

Если же точка $c$ лежит на интервале $(2f(x_0) - s, f(x_0))$, то, полагая $c_1 = 2f(x_0) - c$, видим, что $c_1 \in (f(x_0), s)$ и $2f(x_0) - c_1 = c$, т. е. приходим к уже рассмотренному случаю. Очевидным также является утверждение теоремы и когда $c = f(x_0)$. Теорема доказана.

Утверждание теоремы имеет простой геометрический смысл: при приближении переменной $x$ к точке $x_0$ суммы $S_{n_k}(f;, x)$ колеблются вдоль отрезка, концами которого служат точки $s$ и $2f(x_0) - s$.

Из доказанной теоремы получаем

Следствие. *В условиях теоремы каждая окрестность точки* $x = x_0$ *содержит бесконечное множество точек* $x$, *таких, что* $S_{n_k}(f; x) = c$ *для любого* $c \in \Delta_s$.


1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.
2. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.— Киев : Наук. думка, 1981.— 340 с.



Институт математики АН УССР,
Киев



Поступила в редакцию
27.04.82