УДК 517.5

В. М. Чевский

Об оценках логарифмических производных алгебраических полиномов

В неравенствах типа неравенства С. Н. Бернштейна производную $P_n'(z)$ можно рассматривать как числитель логарифмической производной первого порядка. В настоящей статье доказаны неравенства для числителей логарифмических производных порядка $m > 1$.

Пусть $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_n \neq 0$, — произвольный алгебраический полином с нулями $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Запишем полином в виде произведения $P_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(1 - zz_i)$, тогда, очевидно, $z^n P_n\left(\frac{1}{z}\right) = \prod_{i=1}^{n}(1 - zz_i)$. Прологарифмируем левую и правую части и применим формулу разложения логарифмической функции в степенной ряд. При этом получаем следующее равенство:

$$\ln z^n P_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - zz_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(-zz_i - \frac{1}{2} z^2 z^2 - \frac{1}{m} z^m z_i^m - \ldots\right) =$$

$$= -\frac{s_1}{1} z - \frac{s_2}{2} z^2 - \ldots - \frac{s_m}{m} z^m - \ldots,$$

где $s_m = \sum_{i=1}^{n} z_i^m$ — степенные суммы нулей полинома $P_n(z)$. Дифференцируя левую и правую части равенства m раз и, полагая $z = 0$, получаем формулы для вычисления степенных сумм s_m через коэффициенты полинома: $s_m = -1/(m-1)!\, d^m \ln z^n P_n(z)/dz^m$.

Предположим, что коэффициенты полинома удовлетворяют равенству $s_m = 0$, и рассмотрим конформное отображение при помощи функции $w = z^m$. Сумма чисел $\sum_{i=1}^{n} w_i$ может равняться нулю в том и только в том случае, если любая прямая l_α, проходящая через начало координат и составляющая угол α с осью абсцисс, разделяет точки $w_i = z_i^m$, т. е. они расположены частично по одну, частично по другую сторону прямой, если только все не принадлежат этой прямой.

Положим $z = z \exp(i\varphi)$, $w = \rho \exp(i\theta)$, тогда уравнение прямой l_α запишется как $\operatorname{Im} \exp(-i\alpha)\, w = 0$, а уравнение прообраза этой прямой как $\varphi = (\alpha + n\pi)/m$, $n = 1, 2, \ldots, m$. Прообразом являются m прямых, разбивающих плоскость на $2m$ секторов с углами раствора π/m. Если один из секторов переходит при преобразовании $\omega = z^m$ в верхнюю полуплоскость, то граничащий с ним сектор переходит в нижнюю полуплоскость и наоборот. Обозначим через $\mathcal{D}(m, \alpha)$ объединение прообразов открытой верхней полуплоскости и через $\mathcal{D}^1(m, \alpha)$ — объединение прообразов открытой нижней полуплоскости. Так как нули полинома $P_n(z)$ являются прообразами точек w_i, то из вышесказанного вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Если коэффициенты алгебраического полинома $P_n(z)$ удовлетворяют условию $s_m = 0$, то либо в каждой из областей $\mathcal{D}(m, \alpha)$ $\mathcal{D}^1(m, \alpha)$ содержится по меньшей мере по одному нулю этого полинома, либо все они расположены на прямых $\varphi = (\alpha + n\pi)/m$, $n = 1, 2, \ldots, m$.*

Рассмотрим полином $P_n(z + \xi)$ степени n при фиксированном значении $z \neq z_i$ с нулями $z_1 - z, \ldots, z_n - z$. Запишем этот полином по степеням переменной ξ: $P_n(z + \xi) = \xi^n + \frac{P_n^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}\xi^{n-1} + \ldots + P_n(z)$. Степенные суммы нулей этого полинома $s_m(z)=\sum_{i=1}^{n}(z_i-z)^m$ можно вычислить по формуле $s_m(z)=-1/(m-1)!\, d^m \ln \xi^n P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)/d\xi^m \mid z=0$. Эти же суммы можно представить в виде определителя

$$s_m(z)=(-1)^m\begin{vmatrix} \frac{P^{(n-1)}(z)}{(n-1)!} & 1 & 0\dots 0 \\ 2\,\frac{P^{(n-2)}(z)}{(n-2)!} & \frac{P^{(n-1)}(z)}{(n-1)!} & 1\dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ m\,\frac{P^{(n-m)}(z)}{(n-m)!} & \frac{P^{(n-m+1)}(z)}{(n-m+1)!}\dots & \frac{P^{(n-1)}(z)}{(n-1)!} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^m\Delta_m P_n(z).$$

Полученная формула является простым обобщением формулы [1, с. 38], известной как формула Ньютона. Степенные суммы $s_m(z)$ также полиномы степени m и можно установить взаимосвязь между их нулями и нулями полинома $P_n(z)$.

Обозначим через $\mathcal{D}(m, \alpha, z)$ и $\mathcal{D}(m, \alpha, z)$ области, полученные параллельным смещением на вектор z областей $\mathcal{D}(m, \alpha)$ и $\mathcal{D}^1(m, \alpha)$.

Лемма 2. *Любые m прямых, проходящих через точку z_0, являющуюся нулем полинома $s_m(z)$, под равными между собой углами π/m, разделяют нули полинома $P_n(z)$; т. е. либо в каждой из областей $\mathcal{D}(m, \alpha, z_0)$ $\mathcal{D}^1(m, \alpha, z_0)$ содержится по меньшей мере по одному нулю полинома $P_n(z)$, либо все нули принадлежат этим прямым.*

Очевидно, что доказательство леммы 2 непосредственно опирается на доказательство леммы 1 и элементарно.

Замечание. При $m=1$ единственным нулем суммы $s_1(z)=\sum_{i=1}^{n}(z_i-z)$ является «центр тяжести» нулей полинома $P_n(z)$. Обозначим через $\mathcal{B}$ любую конечную область, через L_m — множество точек, из которых эта область видна под углом π/m и через $\mathcal{B}_m$ — область, ограниченную кривой L_m.

Теорема 1. *Если все нули алгебраического полинома $P_n(z)$ содержатся в области $\mathcal{B}$, то все нули полинома $s_m(z)$ содержатся в области $\mathcal{B}_m$.*

Доказательство проводится методом от противного. На самом деле, если бы хоть один нуль z_0 полинома $s_m(z)$ находился вне области $\mathcal{B}_m$, то всегда можно было бы подобрать m прямых, проходящих через току z_0 под равными углами π/m, которые не разделями бы нули полинома $P_n(z)$.

Пусть $P_n(z)$ — алгебраический полином степени n, все нули которого содержатся в открытой конечной области $\mathcal{B}$; $\mathcal{P}(n)$ — класс алгебраических полиномов $p_n(z)$, удовлетворяющих на границе области $\mathcal{B}$ неравенству $|p_n(z)|\leqslant|P_n(z)|$; $\overline{\mathcal{B}}_m^1$ — замкнутое дополнение области $\mathcal{B}_m$ до расширенной плоскости; $s_m(z)$ и $S_m(z)$ — степенные суммы соответственно полиномов $p_n(z)$ и $P_n(z)$; $\Delta_m(p)$ и $\Delta_m(P)$ — детерминанты в формулах Ньютона соответственно для полиномов $p_n(z)$ и $P_n(z)$.

Теорема 2. *Если алгебраический полином $p_n(z)\in\mathcal{P}(n)$, то при всех $z\in\overline{\mathcal{B}}_m^1$ справедливо неравенство $|\Delta_m(p)|\leqslant|\Delta_m(P)|$ или же (в другой форме) $|s_m(z)|\leqslant S_m(z)|$.*

Доказательство. В условиях теоремы Руше все нули полинома $p_n(z)+\lambda P_n(z)$ также принадлежат области $\mathcal{B}$. По теореме 1 все нули степенной суммы этого полинома $\overline{S}_m(z)$ принадлежат области $\mathcal{B}_m$. Используя формулу (1) и известное свойство детерминантов, можно записать равенство $\overline{S}_m(z) = (-1)^m/(1+\lambda)^m \overline{\Delta}_m(p+\lambda P) = (-\lambda)^m/(1+\lambda)^m [\Delta_m(p) + \ldots \ldots + \Delta_m(P)\cdot\lambda^m]$.

При фиксированном значении λ выражение в скобках можно рассматривать как полином степени m от переменной λ, все нули которого принадлежат единичному кругу $|\lambda| \leqslant 1$, поэтому справедливо неравенство $|\Delta_m(p)| \leqslant |\Delta_m(P)|$ или (что то же самое) неравенство $|s_m(z)| \leqslant |S_m(z)|$, что и требовалось доказать.

1. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике.— М. : Наука, 1978.— 832 с.

Житомирский филиал
Киевского политехнического института

Поступила в редакцию 28.03.82,
после переработки — 20.04.83