УДК 517.

Д. А. Взовский

Эффект малого запаздывания в почти периодических линейных системах высших порядков

Получены достаточные условия существования почти периодических колебаний дифференциальных систем с малым запаздыванием. Выделен класс систем, для которых наличие как угодно малого запаздывания является причиной возникновения почти периодических колебаний.

1. Рассмотрим действительную систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$x''(t) = B(t)\,x(t-\tau) + f(t) \tag{1}$$

при $t \in R^1$, $x(t) \in R^n$, с почти периодической $n \times n$ матрицей $B(t)$ и почти периодической функцией $f(t) \in R^n$ (почти периодичность понимается в смысле Бора); $\tau \equiv \mathrm{const}$ при следующем условии: (с) система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x''(t) = B(t)\,x(t) - \tau B(t)\,x'(t) + g(t) \tag{2}$$

при любой почти периодической функции $g(t) \in R^n$ имеет почти периодическое решение.

Замечание 1. Из условия (с) следует, что существует постоянная M такая, что система (2) при любой почти периодической функции $g(t) \in \in R^n$ имеет единственное почти периодическое решение $x(t)$, причем

$$\| x(t) \|_{(2)} \leqslant M \sup \| g(t) \|$$

(см. [1], [2]); здесь и в последующих оценках $\| \cdot \|$ — норма вектора или матрицы, $t \in R^1$, верхние грани определяются при $t \in R^1$,

$$\| x(t) \|_{(2)} = \max \{\sup \| x(t) \|,\ \sup \| x'(t) \|,\ \sup \| x''(t) \|\}.$$

Замечание 2. Производные $x'(t)$ и $x''(t)$ почти периодического решения системы (2) являются почти периодическими функциями ([2]).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (с) *и*

$$q = \tau^2 M B_0 < 1, \tag{3}$$

где $B_0 = \sup \| B(t) \|$. *Тогда система* (1) *имеет почти периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $x_1(t)$ — почти периодическое решение системы (2) при $g(t) \equiv f(t)$; следовательно, $\| x_1(t) \|_2 \leqslant M \sup \|f(t)\| = h$ (см. замечание 1).

По индукции предположим, что определены почти периодические функции $x_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, где p — натуральное число ($p \in N$), так что каждая функция $x_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, является почти периодическим решением системы

$$x''(t) = B(t)\,x(t) - \tau B(t)\,x'(t) + f(t) + \tau B(t)\,v_i(t), \tag{4}$$

где

$$v_i(t) = x'_{i-1}(t) - \int_0^1 x'_{i-1}(t - s\tau)\,ds,$$

$1 \leqslant i \leqslant p$, $x_0(t) \equiv 0$ (см. замечание 2, условие (с) и известные свойства почти периодических функций [1]), причем

$$\| u_i(t) \|_{(2)} \leqslant q^{i-1} h, \tag{5}$$

при $u_i(t) = x_i(t) - x_{i-1}(t)$, $1 \leqslant i \leqslant p$.

Рассмотрим систему (2), в которой

$$g(t) = \tau B(t)\left[u_p'(t) - \int_0^1 u_p'(t - s\tau)\,ds\right] \tag{6}$$

— почти периодическая функция, и $u_{p+1}(t)$ — почти периодическое решение данной системы, следовательно, $\| u_{p+1}(t) \|_{(2)} \leqslant M\tau^2 B_0 \sup \| u_p''(t) \|$.

Отсюда и в силу (5) имеем оценку

$$\| u_{p+1}(t) \|_{(2)} \leqslant q^p h. \tag{7}$$

Положим $x_{p+1}(t) = x_p(t) + u_{p+1}(t)$. Тогда $x_{p+1}(t)$ — решение системы (4) при $i = p + 1$.

Таким образом, существует последовательность почти периодических вместе со своими производными функций $\{x_p(t)\}$ таких, что выполнены неравенства (7) при всех $p \in N$ и $t \in R^1$, где $u_{p+1}(t) = x_{p+1}(t) - x_p(t)$, причем каждая функция $x_p(t)$ является решением системы (4) при $i = p$, $x_0(t) \equiv 0$. Учитывая неравенство (3), заключаем, что существуют

$$\lim_{p\to\infty} x_p(t) = x(t), \qquad \lim_{p\to\infty} x_p'(t) = x'(t),$$

причем сходимость равномерная на всей действительной оси R^1. Отсюда следует, что $x(t)$ — почти периодическое решение системы

$$x''(t) = B(t)\,x(t) - \tau B(t)\int_0^1 x'(t - s\tau)\,ds + f(t).$$

Ввиду равенства

$$-\tau \int_0^1 x'(t - s\tau)\,ds = x(t - \tau) - x(t)$$

$x(t)$ — решение системы (1).

Рассмотрим систему

$$x''(t) = Bx(t - \tau) + f(t) \tag{8}$$

с постоянной $n \times n$ матрицей B, $\tau \equiv \text{const}$. Система (8) в случае $\tau = 0$ при любой почти периодической функции $f(t) \in R^n$ имеет почти периодическое решение тогда и только тогда, когда матрица B не имеет действительных неположительных собственных значений [2].

Теорема 2. *Если матрица B не имеет собственных значений вида $\mu = -a^2/(1 - i\tau a)$, $a \in R^1$, то при каждом достаточно малом значении $|\tau| \neq 0$ при любой почти периодической функции $f(t) \in R^n$ система (8) имеет почти периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $\tau \neq 0$. Покажем, что условия теоремы 2 гарантируют выполнение условий теоремы 1.

Рассмотрим систему (2), где $B(t) \equiv B$ Очевидно, система (2) удовлетворяет условию (c) в том и только в том случае, когда матрица

$$A = \begin{pmatrix} O & E \\ B & -\tau B \end{pmatrix},$$

(где E — единичная $n \times n$ матрица) не имеет собственных значений, лежащих на мнимой оси. Нетрудно проверить, что число λ является собственным значением матрицы A тогда и только тогда, когда $\lambda = 1/\tau$ и

$$\mu = \lambda^2/1 - \lambda\tau \tag{9}$$

— собственное значение матрицы B. Отсюда следует, что при $\tau \neq 0$ система (2) удовлетворяет условию (c) тогда и только тогда, когда матрица B удовлетворяет условию теоремы. При этом можно положить

$$M = \frac{c}{\alpha}, \quad \alpha = \min_{1\leqslant i\leqslant n} |\operatorname{Re}\lambda_i|, \tag{10}$$

где постоянная c не зависит от α (см. [1]). В силу (9), (10) и условия теоремы 2 получаем, что существует постоянная K такая, что при $0 < |\tau| \leqslant \tau_0$, где число τ_0 достаточно мало, справедлива оценка $M|\tau| \leqslant \leqslant K$. Следовательно, при достаточно малых значениях $|\tau| \neq 0$ выполнено условие (3) теоремы 1. Таким образом, утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1.

Пример. Скалярное уравнение

$$x''(t) + bx(t-\tau) = f(t), \tag{11}$$

где b — положительная постоянная, при $\tau = 0$ и при некоторой почти периодической функции $f(t)$ не имеет почти периодических решений. На основании теоремы 2 при каждом достаточно малом значении $|\tau| \neq 0$ уравнение (11) допускает почти периодическое решение для любой почти периодической функции $f(t)$.

2. Примененный выше подход к изучению влияния запаздывания в линейных системах второго порядка (1) распространяется, очевидно, на системы порядка m, $m \geqslant 2$,

$$x^{(m)}(t) = B_1(t)\, x^{(m-1)}(t-\tau_1) + B_2(t)\, x^{(m-2)}(t-\tau_2) + \ldots + B_m(t) \times \\ \times x(t-\tau_m) + f(t).$$

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 236 с.
2. *Красносельский М. А., Бурд В., Ш, Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания.— М. : Наука, 1970.— 311 с.

Автомобильно-дорожный институт,
Москва

Поступила в редакцию
06.07.82