УДК 517.9

Ю. А. Комаров, Д. Я. Хусаинов

Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова для линейных систем

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in R^n. \tag{1}$$

Для решения $x = x(x_0, t)$ системы (1), удовлетворяющего начальному условию $x(x_0, t_0) = x_0$, справедлива оценка

$$\| x(x_0, t) \| \leqslant \sqrt{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)} \, \| x_0 \|,$$

где $\lambda_{\max}(H)$, $\lambda_{\min}(H)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа симметричной положительно определенной матрицы H, являющейся решением уравнения Ляпунова [1],

$$A^{\mathrm{T}} H + HA = -C. \tag{2}$$

Матрица C также симметричная и положительно определенная. Интерес представляет нахождение матрицы H_0, дающей наиболее точную оценку, т. е. такую, у которой

$$\lambda_{\max}(H_0)/\lambda_{\min}(H_0) = \inf_H \{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)\}. \tag{3}$$

Соответственно функция $v_0(x) = (x^{\mathrm{T}}, H_0 x)$ называется экстремальной функцией Ляпунова [2]. В работах [2—5] рассматривались вопросы существования и нахождения экстремальной функции Ляпунова. В [2] найдена $v_0(x)$ для $n = 2$. Рассмотрим существование $v_0(x) = (x^{\mathrm{T}}, H_0 x)$ для системы (1) произвольной размерности.

Теорема 1. *Уравнение Ляпунова (2) имеет решением матрицу H, для которой $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1$ тогда и только тогда, когда $A^{\mathrm{T}} + A$ — отрицательно определенная матрица.*

Необходимость. Пусть существует положительно определенная матрица C, при которой уравнение (2) имеет решение H, для которого $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1$. Как известно [5], для произвольной симметрической матрицы S существует ортогональная матрица U такая, что $U^{-1}SU$ имеет диагональную структуру. И поскольку $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1$, т. е. $\lambda_1(H) = \lambda_2(H) = \ldots = \lambda_n(H) = \lambda$, то $U^{-1}HU = \lambda E$. Причем, так как H положительно определена, то $\lambda > 0$. Отсюда

$$(U^{-1}A^{\mathrm{T}}U)(U^{-1}HU) + (U^{-1}HU)(U^{-1}AU) = -(U^{-1}CU).$$

Поскольку $U^{-1}HU = \lambda E$, то

$$(U^{-1}A^{\mathrm{T}}U) + (U^{-1}AU) = -\frac{1}{\lambda}(U^{-1}CU).$$

Таким образом, $A^{\mathrm{T}} + A = -\frac{1}{\lambda} C$ — отрицательно определенная матрица.

Достаточность. Пусть $A^{\mathrm{T}} + A$ — отрицательно определенная матрица. Положив $C = -(A^{\mathrm{T}} + A)$, получим $H = E$, и, следовательно, $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1$.

Возможна ситуация, когда не существует положительно определенной матрицы C такой, что для соответствующей матрицы H $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1$. Но при этом для произвольного $\varepsilon > 0$ существует положительно определенная C_ε такая, что для соответствующей H_ε $\lambda_{\max}(H_\varepsilon)/\lambda_{\min}(H_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$. Покажем, что существует сходящаяся последовательность положительно определенных матриц $\{C_k\}$ и, следовательно, $\{H_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{\max}(H_k)/\lambda_{\min}(H_k) = 1$.

Лемма. *Пусть для произвольного $\varepsilon > 0$ существует симметрическая положительно определенная матрица C_ε такая, что для H_ε, являющейся решением (2), $\lambda_{\max}(H_\varepsilon)/\lambda_{\min}(H_\varepsilon) < 1 + \varepsilon$. Тогда существует последовательность $\{C_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, симметрических положительно определенных матриц, сходящаяся к симметрической положительно полуопределенной матрице C, и соответствующая последовательность $\{H_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится к положительно определенной матрице H, причем*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{\max}(H_k) / \lambda_{\min}(H_k) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1/m$ и $\lambda_{\max}(H_m)/\lambda_{\min}(H_m) < 1 + \dfrac{1}{m}$. Разделив уравнение Ляпунова на $\| C_m \|$, получим

$$A^{\mathrm{T}}(H_m/\| C_m \|) + (H_m/\| C_m \|) A = - C_m/\| C_m \|.$$

И так как собственные числа при этом изменились пропорционально, то без ограничения общности можно считать, что $\| C_m \| = 1$, $m = 1, 2, \ldots$ (здесь $\| C_m \| = \lambda_{\max}(C_m)$). Равенство $\| C_m \| = 1$ означает принадлежность C_m сфере единичного радиуса и в силу компактности из последовательности $\{C_m\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{C_{m_k}\} \xrightarrow[k\to\infty]{} C$, причем C положительно полуопределенная.

Поскольку A — асимптотически устойчива, то для собственных чисел оператора $F(H) = A^{\mathrm{T}}H + HA$ будет выполнено $\lambda(F) = \lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ [1]. Следовательно, оператор $F(H)$ является невырожденным. Поэтому существует и является непрерывным (как линейный оператор в конечномерном пространстве) обратный оператор $F^{-1}(C)$, и решение H уравнения Ляпунова (2) непрерывно зависит от C. Таким образом, подпоследовательность $\{H_{m_k}\}$, так же, как и $\{C_{m_k}\}$, сходится к некоторой матрице H. Покажем, что для $\{H_{m_k}\}$ справедливо (4). Имеем $\| A^{\mathrm{T}} \| \cdot \| H \| + \| H \| \cdot \| A \| \geqslant \| C \|$, и так как $\| C \| = 1$, то

$$\lambda_{\max}(H) \geqslant \lambda_{\max}(C)/2\, \| A \| = 1/2\, \| A \| > 0.$$

В силу непрерывной зависимости корней характеристического уравнения от элементов матрицы

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{\max}(H_{m_k}) = \lambda_{\max}(H), \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_{\min}(H_{m_k}) = \lambda_{\min}(H).$$

И так как $\lambda_{\max}(H) > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{\max}(H_{m_k})/\lambda_{\min}(H_{m_k}) = 1$, то $\lambda_{\min}(H) > 0$, а следовательно

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{\max}(H_{m_k})/\lambda_{\min}(H_{m_k}) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1.$$

Теорема 2. *Уравнение Ляпунова имеет последовательность решений $\{H_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{\max}(H_m)/\lambda_{\min}(H_m) = 1$ тогда и только тогда, когда $A^{\mathrm{T}} + A$ — положительно полуопределенная матрица.*

Необходимость. Пусть существует последовательность $\{C_m\}$, а следовательно и $\{H_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim \lambda_{\max}(H_m)/\lambda_{\min}(H_m) = 1$. Как следует из леммы, можно выбрать подпоследовательности $\{H_{m_k}\}$ и $\{C_{m_k}\}$, сходящиеся к положительно определенной матрице H и положительно полуопределенной матрице C, причем

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{\max}(H_{m_k})/\lambda_{\min}(H_{m_k}) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H) = 1.$$

Умножив уравнение Ляпунова (2) на соответствующую ортогональную матрицу и проделав преобразования, приведенные в теореме 1, получим $A^{\mathrm{T}} +$

$+A = -\frac{1}{\lambda} C$, т. е. $A^{\text{т}} + A$ — положительно полуопределенная матрица.

Достаточность. Пусть $A^{\text{т}} + A$ — положительно полуопределенная матрица. Укажем последовательность $\{C_m\}$, при которой $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{\max}(H_m)/\lambda_{\min}(H_m) = 1$. Пусть

$$C_m = -(A^{\text{т}} + A) + \frac{1}{m} E.$$

Матрица C_m — положительно определенная. Решение уравнения Ляпунова (2) ищем в виде $H_m = H_m' + E$. Тогда H_m' определяется уравнением $A^{\text{т}} H_m' + H_m' A = -\frac{1}{m} E$. В силу непрерывной зависимости решения от правой части (см. доказательство леммы) $\lim\limits_{m\to\infty} H_m' = 0$, где 0 — нулевая матрица. Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} H_m = E$,

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{\max}(H_m)/\lambda_{\min}(H_m) = 1,$$

и теорема доказана.

Следствие. *Если собственные значения матрицы $A^{\text{т}} + A$ неположительные и среди них есть нулевые, то экстремальной функции Ляпунова, определяющей асимптотическую устойчивость, не существует.*

Как следует из теоремы 2, положив $C_m = -(A^{\text{т}} + A) + \frac{1}{m} E$, получим $\lim\limits_{m\to\infty} H_m = E$. Таким образом, $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{\max}(H_m)/\lambda_{\min}(H_m) = 1$, но $\lim\limits_{m\to\infty} C_m = -(A^{\text{т}} + A)$ не является отрицательно определенным. И экстремальной функции Ляпунова $v_0(x) = (x^{\text{т}}, H_0 x)$ такой, что $dv_0(x)/dt = (x^{\text{т}}, (A^{\text{т}} + A)x)$ — отрицательно определенная, не существует.

Покажем, что случаи существования экстремальной функции Ляпунова $v_0(x) = (x^{\text{т}}, H_0 x)$, гарантирующей асимптотическую устойчивость, исчерпываются указанными в теореме 1.

Теорема 3. *Экстремальная функция Ляпунова $v_0(x) = (x^{\text{т}}, H_0 x)$, определяющая асимптотическую устойчивость системы (1), существует тогда и только тогда, когда $A^{\text{т}} + A$ — отрицательно определенная матрица.*

Необходимость. Пусть существует экстремальная функция Ляпунова $v_0(x) = (x^{\text{т}}, H_0 x)$, т. е. имеются положительно определенные матрицы H_0 и C_0, входящие в уравнение (2), и

$$\inf_H \{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)\} = \lambda_{\max}(H_0)/\lambda_{\min}(H_0) = \alpha.$$

Покажем, что $\alpha = 1$. Пусть, от противного, $\alpha > 1$. Всегда существует ортогональная матрица U, приводящая H_0 к диагональному виду

$$U^{-1} H_0 U = \begin{pmatrix} \lambda_1(H_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_0) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_0) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_{\min}(H_0) = \lambda_{i_1}(H_0) = \ldots = \lambda_{i_k}(H_0)$, $k < n$. Введем матрицу

$$F = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

где $\mu_{i_1} = \mu_{i_2} = \ldots = \mu_{i_k} = 1$, $\mu_j = 0$, $j \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$. Поскольку матрица C_0—положительно определенная, то при достаточно малом $\delta > 0$ будет положительно определенной и матрица

$$C_1 = C_0 - \delta (A^{\mathrm{T}} UFU^{-1} + UFU^{-1} A).$$

Так как матрица H_1, полученная из уравнения

$$A^{\mathrm{T}} H_1 + H_1 A = -C_1,$$

и матрица H_0 связаны соотношением $H_0 = H_1 - \delta UFU^{-1}$, то

$$\alpha = \lambda_{\max}(H_0)/\lambda_{\min}(H_0) = \lambda_{\max}(H_1 - \delta UFU^{-1})/\lambda_{\min}(H_1 - \delta UFU^{-1}) = \\ = \lambda_{\max}(H_1)/(\lambda_{\min}(H_1) - \delta) > \lambda_{\max}(H_1)/\lambda_{\min}(H_1).$$

Таким образом, построим матрицу H_1, для которой $1 \leqslant \lambda_{\max}(H_1)/\lambda_{\min}(H_1) < \alpha$, и допущение $\alpha > 1$ неверно. Отсюда $\alpha = 1$, и из теоремы 1 следует отрицательная определенность $A^{\mathrm{T}} + A$.

Достаточность следует из теоремы 1.

Следствие. *Показано, что экстремальная функция Ляпунова $v_0(x) = (x^{\mathrm{T}}, H_0 x)$, т. е. такая, что*

$$\inf_H \{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)\} = \lambda_{\max}(H_0)/\lambda_{\min}(H_0) = \alpha,$$

определяющая асимптотическую устойчивость, существует тогда и только тогда, когда $A^{\mathrm{T}} + A$ — отрицательно определена. При этом $\alpha = 1$, т. е. $H_0 = E$, или $v_0(x) = (x^{\mathrm{T}}, x) = \| x \|^2$, а $dv_0(x)/dt = (x^{\mathrm{T}}, (A^{\mathrm{T}} + A) x)$.

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова.— М. : Наука, 1970.— 240 с.
2. *Сарыбеков Р. А.* Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка.— Сиб. мат. журн., 1977, 18, № 5, с. 1159—1167.
3. *Мартынюк А. А., Радзишевский Б.* К теории устойчивости движения.— Мат. физика, 1977, вып. 22, с. 12—22.
4. *Пустовойтов Н. А.* Исследование матричных уравнений второго метода Ляпунова.— В кн.: Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 95—103.
5. *Оболенский А. Ю.* Критерии устойчивости решений некоторых нелинейных систем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1980.— 13 с.
6. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М. : Гостехиздат, 1965.— 185 с.

Госуниверситет,
Киев

Поступила в редакцию 26.05.82
после переработки — 25.01.83