УДК 513.83

Ю. Г. Кондратьев

Неравенство Като для операторов вторичного квантования

Известное неравенство Т. Като [1, теорема X.27] утверждает, что если функция u на R^n и ее лапласиан в смысле обобщенных функций Δu локально принадлежат L_1, то имеет место следующее неравенство между обобщенными функциями:

$$-\Delta|u| \leqslant \operatorname{Re}[(\operatorname{sgn} u)(-\Delta u)], \tag{1}$$

где

$$\operatorname{sgn} u(x) = \begin{cases} 0, & u(x) = 0, \\ \bar{u}(x) u^{-1}(x), & u(x) \neq 0. \end{cases}$$

В заметке устанавливается аналог этого неравенства в том случае, когда роль оператора Лапласа играет эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с бесконечным числом переменных, принадлежащий классу операторов вторичного квантования (см., например, [2]). Доказанное неравенство позволяет получить условие существенной самосопряженности возмущений операторов вторичного квантования неотрицательными потенциалами.

1. Операторы вторичного квантования и их свойства. Приведем необходимые определения и утверждения относительно операторов вторичного квантования; подробное изложение содержится в [3]. Пусть H — действительное гильбертово пространство, H_c — его комплексификация. Для данного самосопряженного в H оператора $A \geqslant 0$ можно выбрать такое ядерное пространство $\Phi \subset H$ (вложение плотное топологическое), что $A \in L(\Phi, \Phi)$, $\exp(-tA) \in L(\Phi, \Phi)$ $\forall t \geqslant 0$ и Φ является областью существенной самосопряженности для A ($L(\Phi, \Phi)$ — совокупность ограниченных операторов из Φ в Φ). Рассматривая двойственность между Φ и его сопряженным Φ' в терминах H, получаем следующее оснащение [4]:

$$\Phi' \supset H \supset \Phi. \qquad (2)$$

На σ-алгебре $\Sigma(\Phi')$ подмножеств Φ', порожденной множествами вида

$$\{\xi \in \Phi' \mid ((\xi, \varphi_1)_H, \ldots, (\xi, \varphi_k)_H) \in B \in B(\mathbf{R}^k),\ \varphi_j \in \Phi\}$$

(цилиндрическими множествами), введем гауссову меру μ_H, определенную по теореме Минлоса своим характеристическим функционалом

$$\widetilde{\mu}_H(\varphi) \equiv \int\limits_{\Phi'} \exp[i(\xi, \varphi)_H]\, d\mu_H(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{4}\|\varphi\|_H^2\right), \quad \varphi \in \Phi.$$

В пространстве $L_2(\Phi', \Sigma(\Phi'), d\mu_H) = L_2(d\mu_H)$ выделим подмножество $\mathscr{P}(\Phi')$ непрерывных полиномов на Φ', т. е. линейную оболочку суженных на диагональ непрерывных на Φ' полилинейных форм.

На $\mathscr{P}(\Phi')$ можно ввести топологию, превращающую его в ядерное пространство; сходимость последовательности полиномов в этой топологии означает равномерную ограниченность их степеней и сходимость ядер, задающих соответствующие полилинейные формы [3].

Пространство $\mathscr{P}(\Phi') \subset \bigcap\limits_{p \geqslant 1} L_p(d\mu_H)$ будем интерпретировать как пространство основных функций на Φ', его сопряженное $\mathscr{P}'(\Phi')$ относительно $L_2(d\mu_H)$ — как пространство обобщенных функций на Φ'. Таким образом, имеем следующее оснащение, порожденное (2):

$$\mathscr{P}'(\Phi') \supset L_2(d\mu_H) \supset \mathscr{P}(\Phi'), \qquad (3)$$

причем включение $\mathscr{P}'(\Phi') \supset L_p(d\mu_H) \supset L_2(d\mu_H)$, $p \in (1, 2]$, показывает, что функциям из $L_p(d\mu_H)$, $p \in (1, 2]$, соответствуют (регулярные) обобщенные функции из $\mathscr{P}'(\Phi')$.

Для функции $u \in \mathscr{P}(\Phi')$ при каждом $\xi \in \Phi'$ существуют производные $u'(\xi) \in \Phi_c$, $u''(\xi) \in \Phi_c \otimes \Phi_c$ (Φ_c — комплексификация Φ). Ядру $u''(\xi)$ сопоставим оператор $\widehat{u}''(\xi)$ в H_c согласно формуле $(\widehat{u}''(\xi) h_1, h_2)_{H_c} = (u''(\xi), \overline{h}_1 \otimes h_2)_{H_c \otimes H_c}$. Легко видеть, что для $u \in \mathscr{P}(\Phi')$ определено дифференциальное выражение

$$(N_A u)(\xi) = -\frac{1}{2}[\mathrm{Sp}_{H_c} A\widehat{u}''(\xi) - 2(Au'(\xi), \xi)_{H_c}]. \qquad (4)$$

Это выражени задает оператор N_A — вторичное квантование A — в $L_2(d\mu_H)$ как самосопряженный в существенном на области $\mathscr{P}(\Phi')$, причем $N_A \in L(\mathscr{P}(\Phi'), \mathscr{P}(\Phi'))$ и для $u, v \in \mathscr{P}(\Phi')$

$$(N_A u, v)_{L_2(d\mu_H)} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Phi'} (u'(\xi), Av'(\xi))_{H_c}\, d\mu_H(\xi).$$

Соответствующая полугруппа $\exp(-tN_A)$, $t \geqslant 0$, сохраняет положительность функций из $L_2(d\mu_H)$ и, следовательно, является непрерывной L_p-сжимающей [1, теорема X.55]. Поэтому рассматриваемая полугруппа порождает (посредством сужения либо расширения по непрерывности) сильно непрерывную сжимающую полугруппу $\exp(-tN_{A,p})$ в каждом $L_p(d\mu_H)$, $p \geqslant 1$, с генератором $-N_{A,p}$. Отметим, что $\exp(-tN_A) \in L(\mathscr{P}(\Phi'), \mathscr{P}(\Phi'))$ $\forall t \geqslant 0$, $\mathscr{P}(\Phi') \subset \mathscr{D}(N_{A,p})$ $\forall p \geqslant 1$, так что $\mathscr{P}(\Phi')$ является существенной областью оператора $N_{A,p}$ $\forall p \geqslant 1$ [1, теорема X. 49].

2. Неравенство Като для оператора N_A. Если $u \in L_p(d\mu_H)$ для некоторого $p > 1$, то благодаря включению $N_A \in L(\mathscr{P}(\Phi'), \mathscr{P}(\Phi'))$ можно определить $N_A u \in \mathscr{P}'(\Phi') : (N_A u, v)_{L_2} = (u, N_A v)_{L_2}$ $(v \in \mathscr{P}(\Phi'))$.

Теорема 1. *Пусть $u \in L_p(d\mu_H)$, $p > 1$, и $N_A u \in L_p(d\mu_H)$, где действие оператора N_A понимается в смысле обобщенных функций. Тогда справедливо следующее неравенство для обобщенных функций из $\mathscr{P}'(\Phi')$:*

$$N_A |u| \leqslant \operatorname{Re}[(\operatorname{sgn} u) N_A u]. \tag{5}$$

Замечание. Абстрактный вариант неравенства Като, справедливый для генераторов, сохраняющих положительность полугрупп, утверждает наличие (5) для $u \in \mathscr{D}(N_A)$ [5]. Доказательство, приводимое ниже, использует дифференциальную природу оператора и позволяет благодаря этому распространить (5) на более широкий класс функций.

Доказательство. Докажем (5) для $u \in \mathscr{P}(\Phi')$. Введем для $\varepsilon > 0$ функцию

$$u_\varepsilon(\xi) = [|u(\xi)|^2 + \varepsilon^2]^{1/2}.$$

Дифференцируя равенство $u_\varepsilon^2 = |u|^2 + \varepsilon^2$, получаем $u_\varepsilon u_\varepsilon' = \operatorname{Re}(\overline{u}u')$, откуда $(Au_\varepsilon', u_\varepsilon')_{H_c} u_\varepsilon^2 = (\operatorname{Re}\overline{u}u', A\operatorname{Re}\overline{u}u')_{H_c}$, т. е.

$$(Au_\varepsilon', u_\varepsilon')_{H_c} = |\overline{u}/u_\varepsilon|^2 (Au', u)_{H_c} \leqslant (Au'u')_{H_c}, \tag{6}$$

так как $|u| \leqslant u_\varepsilon$.

Применив N_A к обеим частям того же равенства, имеем, с использованием (4),

$$2u_\varepsilon N_A u_\varepsilon - (Au_\varepsilon', u_\varepsilon')_{H_c} = 2\operatorname{Re}\overline{u}N_A u - (Au', u')_{H_c},$$

что влечет, благодаря (6), $u_\varepsilon N_A u_\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\overline{u}N_A u$, или

$$N_A u_\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}[(\overline{u}/u_\varepsilon) N_A u]. \tag{7}$$

Устремив $\varepsilon \to 0$ в (7) с учетом того, что $u_\varepsilon \to |u|$ в $L_p(d\mu_H)$ $\forall p > 1$, $\overline{u}u_\varepsilon^{-} \to \operatorname{sgn} u$ поточечно и $|\overline{u}u_\varepsilon^{-1}| \leqslant 1$, получим $N_A u_\varepsilon \to N_A |u|$ в $\mathscr{P}'(\Phi')$, $\overline{u}u_\varepsilon^{-1} N_A u \to (\operatorname{sgn} u) N_A u$ в $\mathscr{P}'(\Phi')$, так что (5) доказано для всех $u \in \mathscr{P}(\Phi')$.

Пусть теперь функция u и индекс p такие, как в условии теоремы; можно считать, что $p < 2$, тогда сопряженный индекс $p' > 2$ $(p^{-1} + (p')^{-1} = 1)$. Для произвольного $v \in \mathscr{D}(N_{A,p'})$, согласно п. 1, можно выбрать $\{v_j,\ j \geqslant 1\} \subset \mathscr{P}(\Phi') : v_j \to v$, $j \to \infty$ в $L_{p'}(d\mu_H)$, $N_{A,p'}v_j \to N_{A,p'}v$, $j \to \infty$ в $L_{p'}(d\mu_H)$. Обозначим $w = N_A u \in L_p(d\mu_H)$, тогда

$$(w, v)_{L_2} = \lim_{j\to\infty} (N_A u, v_j)_{L_2} = \lim_{j\to\infty} (u, N_A v_j)_{L_2} = (u, N_{A,p'}v)_{L_2}.$$

Таким образом, $u \in \mathscr{D}(N_{A,p'}^*)$ и $w = N_{A,p'}^* v$. Так как $[\exp(-tN_{A,p'})]^* = \exp(-tN_{A,p})$, $N_{A,p'}^* = N_{A,p}$, значит $u \in \mathscr{D}(N_{A,p})$. Теперь выберем $\{u_j,\ j \geqslant 1\} \subset \mathscr{P}(\Phi')$, $u_j \to u$, $j \to \infty$, в $L_p(d\mu_H)$, $N_A u_j \to N_{A,p} u$, $j \to \infty$ в $L_p(d\mu_H)$ (см. п. 1). Для $j \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$ имеем неравенство

$$N_A u_{j,\varepsilon} \leqslant \operatorname{Re}[(\overline{u}_j/u_{j,\varepsilon}) N_A u_j],$$