УДК 517.9

А. Ю. Константинов

Сингулярные свойства мономов Вика

Хорошо известно, что в пространстве $L_2(\mathbb{R}^\nu)$, $\nu \geqslant 4$, точечное возмущение не оказывает влияния на оператор Лапласа $-\Delta_\nu$. Точнее, $-\Delta_\nu$ оказывается существенно самосопряженным на области $C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu \setminus \{x\})$, $x \in \mathbb{R}^\nu$ (см., например, [1]). Как следствие $-\Delta_\nu + v_n \to -\Delta_\nu$ в сильном резольвентном смысле, когда носители потенциалов v_n стягиваются к точке. Подобные факты верны для широкого класса дифференциальных операторов, возмущенных потенциалами с малыми (в определенном смысле) носителями [2, 3]. В данной заметке мы показываем, что аналогичные результаты справедливы при возмущении оператора энергии свободного поля мономами Вика достаточно высокой степени.

1. Введем необходимые обозначения: $F = L_2(\mathbb{R}^d)$, $F^0 = \mathbb{C}^1$, F^n, $n \geqslant 1$, — n-я симметрическая тензорная степень F, $\mathscr{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} F^n$ — симметрическое пространство Фока над F; $\mathscr{S}_n = \mathscr{S}(\mathbb{R}^{nd}) \cap F^n$, где $\mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$ — пространство Шварца основных функций; $\Phi = \{\varphi = (\varphi_n)_{n=0}^\infty \in \mathscr{F} : \varphi_k \in \mathscr{S}_k,\ k \geqslant 1,\ \text{и}\ \varphi_k = 0,\ k \geqslant n$, где n — номер, зависящий от $\varphi\}$; $h_0 = (-\Delta_d + m^2)^{1/2}$, $m > 0$, $H_0 = d\Gamma(h_0)$ — свободный гамильтониан, $N = d\Gamma(1)$ — оператор числа частиц ($d\Gamma(A)$ — вторичное квантование оператора A [1]). Операторы H_0, N существенно самосопряжены на Φ в пространстве $\mathscr{F}$. По оператору H_0 введем гильбертову шкалу пространств $\mathscr{H}_p = D(H_0^{p/2})$, $(\cdot, \cdot)_p = (H_0^p \cdot, \cdot)$, $p \geqslant 0$. Легко проверить, что $\|\cdot\|_p$ эквивалентна норме пространства $\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_2^{p/2}(\mathbb{R}^{nd})$. Мы будем рассматривать мономы Вика вида:

$$\gamma_{n_1 n_2} = (2\pi)^{-\frac{d(n_1+n_2-2)}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{(n_1+n_2)d}} \delta\Big(\sum_1^{n_1} k_i - \sum_1^{n_2} p_j\Big) \prod_{i=1}^{n_1} (2\mu(k_i))^{-1/2} \times$$

$$\times a^*(k_i) \prod_{i=1}^{n_2} (2\mu(p_j))^{-1/2} a(p_j)\, dk_1 \ldots dk_{n_1} dp_1 \ldots dp_{n_2}, \tag{1}$$

где $n_1, n_2 \geqslant 0$, $\mu(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$, $a^*(k)$, $a(k)$ — операторы рождения и уничтожения (см. [1]). $\gamma_{n_1 n_2}$ — корректно определенная форма на $\Phi \times \Phi$:

$$\gamma_{n_1 n_2}(\varphi, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} c(n_1, n_2, l)\, \gamma^l_{n_1 n_2}(\varphi_{n_1+l}, \psi_{n_2+l}), \tag{2}$$

где $c(n_1, n_2, l) = 2^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \left[\dfrac{(n_1+l)!\,(n_2+l)!}{(l!)^2}\right]$,

$$\gamma^l_{n_1 n_2}(\varphi_{n_1+l}, \psi_{n_2+l}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{(l+1)l}} [(h_0^{-1/2})^{\otimes n_1} \otimes 1^{\otimes l} \varphi_{n_1+l}] (\underbrace{x, \ldots, x}_{n_1}, x_1, \ldots, x_l) \times$$

$$\times [(h_0^{-1/2})^{\otimes n_2} \otimes 1^{\otimes l} \psi_{n_2+l}] (\underbrace{x, \ldots, x}_{n_2}, x_1, \ldots, x_l)\, dx dx_1 \ldots dx_l. \tag{3}$$

Отметим, что такие мономы возникают при рассмотрении полиномиальных моделей квантовой теории поля.

Остановимся кратко на понятии сингулярной билинейной формы, введенном для неотрицательных форм в [4]. Не напоминая определения, отметим лишь, что достаточным условием сингулярности в гильбертовом пространстве H формы γ является плотность ядра $\operatorname{Ker} \gamma = \{\varphi \in Q(\gamma) : \gamma(\varphi, \varphi) = 0\}$ ($Q(\gamma)$ — область определения γ) в H. Здесь мы будем называть произвольную билинейную форму γ сингулярной в H, если $\operatorname{Ker}\gamma$ содержит линеал, плотный в H. Отметим, что из сингулярности ненулевой формы γ следует ее незамыкаемость.

2. Основной результат работы дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$. Форма $\gamma_{n_1 n_2}$ сингулярна в пространстве $\mathcal{H}_p$ тогда и только тогда, когда*

$$\max\{n_1, n_2\}(d-1) \geqslant d + p. \tag{4}$$

Если условие (4) *не выполнено, то справедлива оценка*

$$|\gamma_{n_1 n_2}(\varphi, \psi)| \leqslant c \,\|(1+N)^{m_1/2}\varphi\|_p \,\|(1+N)^{m_2/2}\psi\|_p, \qquad \varphi, \psi \in \Phi, \tag{5}$$

где $c > 0$; m_1, m_2 — неотрицательные целые числа такие, что $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$.

Простым, но важным для приложений следствием теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *Если $\max\{n_1, n_2\}(d-1) \geqslant d+2$, то существует линеал $\Phi_0 \subset \operatorname{Ker}\gamma_{n_1 n_2}$, являющийся существенной областью для H_0.*

Доказательство теоремы 1. Пусть выполнено условие (4). Положим $n = \max\{n_1, n_2\}$. Рассмотрим линеал $\Phi_{0n} = \{\varphi = (\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \in \Phi : \varphi_k \in A_n^k,\ k \geqslant n\}$, где $A_n^k = (h_0^{1/2})^{\otimes k} C_0^\infty(\mathbb{R}^{kd} \setminus \Gamma_n^k)$, $\Gamma_n^k = \bigcup_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n < k} \Gamma^k_{n, i_1, \ldots, i_n}$, $\Gamma^k_{n, i_1, \ldots, i_n} = \{\xi = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{kd} : x_{i_1} = \ldots = x_{i_k}\}$, $k \geqslant n$. В $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n < k$ силу (2), (3) $\Phi_{0n} \subset \operatorname{Ker}\gamma_{n_1 n_2}$. Покажем, что Φ_{0n} плотно в $\mathcal{H}_p$. Для этого установим плотность $A_n^k \cap \mathcal{S}_k$ в k-частичном подпространстве пространства $\mathcal{H}_p$. Так как $s_k A_n^k \subset \subset A_n^k \wedge \mathcal{S}_k)$ (s_k — проектор на F^k в $F^{\otimes k} = F \otimes \ldots \otimes F$), достаточно проверить плотность A_n^k в $W_2^{p/2}(\mathbb{R}^{kd})$. Последнее равносильно плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^{kd} \setminus \Gamma_n^k)$ в $G_2^{p/2}(\mathbb{R}^{kd})$ ($G_2^\alpha(\mathbb{R}^{sd})$ — пополнение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{sd})$ по скалярному произведению $(h_0^{\otimes s}\cdot, \cdot)_{W_2^\alpha(\mathbb{R}^{sd})}$). Согласно [2] $C_0^\infty(\mathbb{R}^{nd} \setminus \Gamma^n_{n,1,2,\ldots,n})$ плотно в $W_2^{\frac{p+n}{2}}(\mathbb{R}^{nd})$. Так как $W_2^{\frac{p+n}{2}}(\mathbb{R}^{nd}) \otimes G_2^{p/2}(\mathbb{R}^{(k-n)d})$ вложено в $G_2^{p/2}(\mathbb{R}^{kd})$, то $C_0^\infty(\mathbb{R}^{kd} \setminus \Gamma^k_{n, i_1, \ldots, i_n})$ плотно в $G_2^{p/2}(\mathbb{R}^{kd})$. Плотность $C_0^\infty(\mathbb{R}^{kd} \setminus \Gamma_n^k)$ следует теперь из следующей леммы, доказательство которой мы приведем в конце параграфа.

Лемма. *Пусть B — банахово пространство, содержащее $C_0^\infty(\mathbb{R}^l)$, такое, что для всякой $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^l)$ отображение $C_0^\infty(\mathbb{R}^l) \in h(x) \to f(x)\, h(x)$ непрерывно в B; G_1, G_2 — замкнутые подмножества $\mathbb{R}^l$, $G = G_1 \cup G_2$. Тогда, если $C_0^\infty(\mathbb{R}^l \setminus G_i)$, $i = 1, 2$, плотны в B, то и $C_0^\infty(\mathbb{R}^l \setminus G)$ плотно в B.*

Пусть теперь (4) не выполнено. Оценка (5) прямо следует из результатов заметки [5]. С помощью (5) легко показать, что $\gamma_{n_1 n_2}$ не сингулярна в $\mathcal{H}_p$.

Отметим, что идея использовать формулу (3) для аанализа сингулярных свойств мономов Вика принадлежит В. Д. Кошманенко [4]. Им же в связи с задачей рассеяния доказана сингулярность форм $\gamma_{n_1 n_2}$ в пространстве $F = \mathcal{H}_0$ при $d = 3$, $n_1 \geqslant 2$, $n_2 \geqslant 2$.

Теорема 3. *Формы γ_{n0} и γ_{0n}, $n \geqslant 1$, сингулярны во всех пространствах $\mathcal{H}_p$, $p \geqslant 0$.*

Доказательство. Положим $\tilde{\Phi}_{0n} = \{\varphi = (\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \in \Phi,\ \varphi_k \in B_n^k,\ k \geqslant n$, где $B_n^k = \{\varphi_k \in \mathcal{S}_k) : \check{\varphi}_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{kd} \setminus \tilde{\Gamma}_n^k)\}$, $\tilde{\Gamma}_n^k = \{\xi = (x_1, \ldots, x_k)\ \mathbb{R}^{kd} : x_1 + \ldots + x_n = 0\}$, $k \geqslant n$ ($\smile$ — преобразование Фурье). Очевидно, что $\tilde{\Phi}_{0n} \subset \subset \operatorname{Ker}\gamma_{0n}$ ($\operatorname{Ker}\gamma_{n0}$) и $\tilde{\Phi}_{0n}$ плотно во всех $\mathcal{H}_p$, $p \geqslant 0$.

Доказательство леммы. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^l \setminus G_1)$ и $\operatorname{supp} f \subset K_R$ (K_R — шар радиуса R), α — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^l)$ такая, что $\alpha(x) = 1$, $x \in K_R$. Так как $C_0^\infty(\mathbb{R}^l \setminus G_2)$ плотно в B, то найдется последовательность функций

$\alpha_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^l \setminus G_2)$, сходящаяся к α в B. Положим $f_n = \alpha_n f$. Тогда $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^l \setminus G)$ и $f - f_n = (\alpha - \alpha_n) f \xrightarrow{B} 0$, $n \to \infty$. Лемма доказана.

Отметим, что сингулярность форм $\gamma_{n_1 n_2}$ при условиях теорем 1 и 3 в общем (а не симметрическом) пространстве Фока была доказана автором в [5].

3. Пусть функции $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ обладают свойствами: $g(x) \geqslant 0$, $g(-x) = g(x)$, $h(-x) = \overline{h(x)}$, $\check{h}(0) = 1$. Положим $h_\sigma(x) = \sigma^d h(\sigma x)$. Введем обрезанные взаимодействия

$$\gamma_{n_1 n_2}[g] = 2\pi^{\frac{d(n_1+n_2-1)}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{(n_1+n_2)d}} \check{g}\left(\sum_1^{n_1} k_i - \sum_1^{n_2} p_j\right) \prod_{i=1}^{n_1} (2\mu(k_i))^{-1/2} \times$$

$$\times a^*(k_i) \prod_{j=1}^{n_2} (2\mu(p_j))^{-1/2} a(p_j)\, dk_1 \ldots dk_{n_1} dp_1 \ldots dp_{n_2};$$

$$\gamma_{n_1 n_2}[g, \sigma] = (2\pi)^{-\frac{d(n_1+n_2-1)}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{(n_1+n_2)d}} \check{g}\left(\sum_1^{n_1} k_i - \sum_1^{n_1} p_j\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n_1} (2\mu(k_i))^{-1/2} \check{h}_\sigma(k_i)\, a^*(k_i) \prod_{j=1}^{n_2} (2\mu(p_j))^{-1/2} \check{h}_\sigma(p_j) \times$$

$$\times a(p_j)\, dk_1 \ldots dk_{n_1} dp_1 \ldots dp_{n_2}.$$

Согласно [1, теорема X. 44], форме $\gamma_{n_1 n_2}[g, \sigma]$ соответствует оператор $T_{n_1 n_2}[g, \sigma]$ такой, что $\gamma_{n_1 n_2}[g, \sigma](\varphi, \psi) = (T_{n_1 n_2}[g, \sigma]\varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in \Phi$. Рассмотрим форму $\gamma[g, \sigma] = \sum\limits_{n_1, n_2 = 0}^{M} \alpha_{n_1 n_2} \gamma_{n_1 n_2}[g, \sigma]$, где $\alpha_{n_1 n_2} \in \mathbb{R}^1$, $\alpha_{n_1 n_2} = \alpha_{n_2 n_1}$, $M \geqslant 1$. Форме $\gamma[g, \sigma]$ соответствует симметрический, определенный на Φ оператор $T[g, \sigma] = \sum\limits_{n_1 n_2 = 0}^{M} \alpha_{n_1 n_2} T_{n_1 n_2}[g, \sigma]$. В силу того, что g, $\check{h}$ — действительные, оператор $H_0[g, \sigma] = H_0 + T[g, \sigma]$ коммутирует с комплексным сопряжением и, следовательно, имеет равные индексы дефекта. Положим $\gamma[g] = \sum\limits_{n_1, n_2 = 0}^{M} \alpha_{n_1 n_2} \gamma_{n_1 n_2}[g]$. Символом $\xrightarrow{S \cdot R}$ будем обозначать сильную резольвентную сходимость.

Теорема 4. *Пусть* $d \geqslant 2$, $\alpha_{n_1 n_2} = 0$, *если* $\max\{n_1, n_2\} < (d+1)/(d-1)$; $\gamma[g]$ — *неотрицательная форма на* $\Phi \times \Phi$. *Тогда* $H_1[g, \sigma] \xrightarrow{S \cdot R} H_0$, $\sigma \to \infty$. *Здесь* $H_1[g, \sigma]$ — *расширение по Фридрихсу оператора* $H_0[g, \sigma]$.

Доказательство. Неотрицательность формы $\gamma[g]$ влечет за собой неотрицательность форм $\gamma[g, \sigma]$, $\sigma > 0$. Таким образом, $H_1[g, \sigma] \geqslant H_0$, $\sigma > 0$. Так как $\gamma[g, \sigma](\varphi, \psi) \to \gamma[g](\varphi, \psi)$, $\sigma \to \infty$, для $\varphi, \psi \in \Phi$, достаточно доказать, что $\operatorname{Ker} \gamma[g]$ плотно в $\mathscr{H}_1$ (см. теорему 3.6 из [6, гл. VIII]). Остается заметить, что при $m = -[-(d+1)/(d-1)]$ $\Phi_{0m} \subset \operatorname{Ker} \gamma[g]$ ($\Phi_{0m} \subset \Phi_{0k}$ при $k \geqslant m$ и $\Phi_{0\max\{n_1, n_2\}} \subset \operatorname{Ker} \gamma_{n_1 n_2}$).

Пример. Пусть $d \geqslant 2$, $\alpha_{n_1 n_2} = a_{n_1} a_{n_2}$, $a_i \in \mathbb{R}^1$ и $a_i = 0$ для $i < \dfrac{d+1}{d-1}$, тогда выполнены все предположения теоремы 4.

Сформулируем еще одну теорему, в которой удается отказаться от неотрицательности $\gamma[g]$ за счет дополнительных ограничений на функцию h и коэффициенты $\alpha_{n_1 n_2}$.

Теорема 5. *Пусть* $d \geqslant 2$, $\alpha_{n_1 n_2} = 0$, *когда* $\min\{n_1, n_2\} < (d+2)/(d-1)$, $h \in C_{\infty 0}(\mathbb{R}^d)$, *тогда* $H[g, \sigma] \xrightarrow{S.R.} H_0$, $\sigma \to \infty$.

Здесь $H[g, \sigma]$ — произвольное самосопряженное расширение $H_0[g, \sigma]$.

Доказательство следует из сильной сходимости $H_0[g, \sigma]\varphi$ к $H_0\varphi$ при $\sigma \to \infty$ на Φ_{0m} для $m = -[-(d+2)/(d-1)]$ и существенной самосопряженности H_0 на Φ_{0m}.

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2.— М.: Мир, 1978.— 395 с.
2. *Svendsen E. S.* The effect of submanifolds upon essential seef agjointness and deficiency indices.— I. of Math. An. and Appl., 1981, **80**, p. 551—565.
3. *Чуешов И. Д.* О существенных областях определения оператора Шредингера с высокосингулярным потенциалом парного взаимодействия. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1981, вып. 36, с. 111—124.
4. *Кошманенко В. Д* Операторное представление для незамыкаемых квадратичных форм и задача рассеяния.— ДАН СССР, 1979, **245**, № 2, с. 295—298.
5. *Константинов А. Ю.* Сингулярность мономов Вика в пространстве Фока.— В кн.: Прямые и обратные задачи теории рассеяния. К., 1981, с. 43—47.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.—М. : Мир, 1972.— 740 с.

Госуниверситет,
Киев

Поступила в редакцию
22.06.82