УДК 519.21

В. С. Королюк, В. В. Королюк

Центральная предельная теорема для однородных процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями

Проблеме применимости центральной предельной теоремы в теории вероятностей посвящены многочисленные работы. Укажем здесь лишь на наиболее близкие по постановке задач и методам решения, содержащие обширную библиографию [1—5].

В настоящей работе для доказательства центральной предельной теоремы применяется метод асимптотического анализа уравнений марковского восстановления для производящих функций переключаемых процессов уклонений [6—8]. Развитию предельных теорем для ступенчатых переключаемых процессов посвящены работы [9—11].

Пусть заданы: семейство однородных процессов с независимыми приращениями $Y(t, x)$, $x \in X$, $Y(0, x) = 0$ с кумулянтами

$$\psi(iz, x) = t^{-1} \ln \mathbf{M} \exp [izY(t, x)] \tag{1}$$

и равномерно эргодический полумарковский процесс $\varkappa(t)$ в измеримом фазовом пространстве состояний $(E, \mathscr{E})$ с полумарковским ядром

$$Q(x, t, A) = \mathscr{P}\{\varkappa_{n+1} \in A,\ \theta_{n+1} \leqslant t / \varkappa_n = x\}. \tag{2}$$

Здесь $(\varkappa_n,\ \theta_n,\ n \geqslant 0)$ — процесс марковского восстановления [12], порождающий $\varkappa(t)$; $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$.

Введем семиинварианты процессов $y(t, x)$

$$\lambda(x) = \left.\frac{d\psi(z, x)}{dz}\right|_{z=0}, \quad \lambda_2(x) = \left.\frac{d^2\psi(z, x)}{dz^2}\right|_{z=0}, \tag{3}$$

и обозначения: $\rho(A)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова $(\varkappa_n, n \geqslant 0)$ с вероятностями перехода $P(x, A) = Q(x, +\infty, A)$; $R_0 = (I - P + \Pi)^{-1} - \Pi$ — потенциал вложенной цепи Маркова [12]; Π — проектор: $\Pi a(x) = \int_E \rho(dx)\, a(x)$; функции распределения времен пребывания в состояниях $G_x(t) = Q(x, t, E) = \mathscr{P}\{\theta_x \leqslant t\}$; моменты времен пребывания $m(x) = \mathbf{M}\theta_x = \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\, dt$, $(\overline{G}_x(t) = 1 - G_x(t))$, $m_2(x) = \mathbf{M}\theta_x^2 = \int_0^\infty t^2 G_x(dt)$; стационарный параметр интенсивности

$$\Lambda = \int_E \rho(dx)\, m(x)\, \lambda(x)/m, \quad m = \int_E \rho(dx)\, m(x). \tag{4}$$

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что

$$Q(x, t, A) = P(x, A)\, G_x(t). \tag{5}$$

Определим переключаемый процесс соотношениями

$$Y(dt) = Y(dt, \varkappa(t)), \tag{6}$$

или иначе

$$Y(t) = Y(t - \tau_{\nu(t)}, \varkappa(t)) + Y_1(t), \tag{7}$$

$$Y_1(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} Y(\theta_k, \varkappa_{k-1}). \tag{8}$$

Здесь $\tau_k = \sum_{r=1}^{k} \theta_r$ — моменты восстановления, $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \leqslant t\}$ — процесс восстановления.

Введем теперь переключаемый процесс уклонений

$$\alpha_\varepsilon(t) = Y(t \mid \varepsilon)\sqrt{\varepsilon} - \Lambda t/\sqrt{\varepsilon}. \tag{9}$$

Здесь ε — малый параметр, с помощью которого осуществляется предельный переход при $\varepsilon \to 0$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) *вложенная цепь Маркова* $(\varkappa_n,\ n \geqslant 0)$ *равномерно эргодическая;* 2) *существуют и равномерно ограничены по* $x \in E$ *вторые моменты времен пребывания в состояниях* $m_2(x)$, *а также равномерно ограничены по* $x \in E$ *первые моменты времен пребывания:*

$$0 < c_1 \leqslant m(x) \leqslant c_2 < +\infty; \tag{10}$$

3) *кумулянты процессов с независимыми приращениями удовлетворяют условию (при* $z \to 0$):

$$\psi(iz, x) - iz\lambda(x) + z^2\lambda_2(x)/2 = o(z^2). \tag{11}$$

Тогда имеет место

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{M}\,[e^{iz\alpha_\varepsilon(t)}/\varkappa(0) = x] = [s + z^2\sigma^2/2]^{-1}. \tag{12}$$

Дисперсия предельного нормального закона σ^2 *вычисляется по формуле*

$$\sigma^2 = \Big\{\int_E \rho(dx)\,[2m(x)(\lambda(x) - \Lambda)\,[R_0 - I]\, m(x)(\lambda(x) - \Lambda) +$$

$$+ m(x)\lambda_2(x) + m_2(x)(\lambda(x) - \Lambda)^2]\Big\}/m. \tag{13}$$

Доказательство теоремы основано на применении предельной теоремы обращения сингулярно возмущенных операторов [13] к уравнению марковского восстановления, которому удовлетворяет производящая функция процесса уклонений

$$U_\varepsilon(x, s) = \int_0^\infty e^{-st}dt\mathbf{M}\,[e^{iz\alpha_\varepsilon(t)}/\varkappa(0) = x]. \tag{14}$$

Стандартными рассуждениями с учетом первого скачка полумарковского процесса $\varkappa(t)$ (см., например, [14]) сначала строим уравнение марковского восстановления для характеристической функции процесса уклонений, а затем переходим к преобразованию Лапласа по t. В итоге получим уравнение

$$U_\varepsilon(x, s) - G_\varepsilon(x, s) \int_E P(x, dy)\, U_\varepsilon(y, s) = \varepsilon d_\varepsilon(x, s). \tag{15}$$

Здесь

$$G_\varepsilon(x, s) = \int_0^\infty G_x(dt) \exp[t\varphi_\varepsilon - \varepsilon s], \tag{16}$$

$$d_\varepsilon(x, s) = \int_0^\infty \overline{G}_x(t)\, dt \exp[t\varphi_\varepsilon - \varepsilon s], \tag{17}$$

$$\varphi_\varepsilon = \psi(iz\sqrt{\varepsilon}, x) - iz\sqrt{\varepsilon}\Lambda. \tag{18}$$

Уравнение (15) — исходный объект в асимптотическом анализе.

Для выбора подходящей предельной теоремы обращения строится разложение оператора, определяющего уравнение марковского восстановления (15), основанное на асимптотическом представлении ядер (16) и (17).

Лемма. *В условиях теоремы имеют место асимптотические представления*

$$G_\varepsilon(x, s) = 1 + \sqrt{\varepsilon}\, izM_1(x) - \varepsilon[z^2M_2(x)/2 + sm(x)] + o(\varepsilon), \tag{19}$$

$$d_\varepsilon(x, s) = m(x) + o_\varepsilon(1). \tag{20}$$

Здесь

$$M_1(x) = m(x)(\lambda(x) - \Lambda), \tag{21}$$

$$M_2(x) = m(x)\lambda_2(x) + m_2(x)(\lambda(x) - \Lambda)^2. \tag{22}$$

Остаточные члены $o(\varepsilon)$ и $o_\varepsilon(1)$ равномерно по $x \in E$ и $s \in [0, s_0]$ стремятся к нулю вместе с ε.

Утверждение леммы следует из представления

$$G_\varepsilon(x, s) = \int_0^\infty e^{t\varphi_\varepsilon} G_x(dt) - \varepsilon sm(x) - \varepsilon s \int_0^\infty t(e^{t\varphi_\varepsilon} - 1)\, G_x(dt) +$$

$$+ \int_0^\infty e^{t\varphi_\varepsilon}(e^{-\varepsilon st} - 1 + \varepsilon st)\, G_x(dt), \tag{23}$$

в котором первый член есть характеристическая функция случайной величины $\beta_x = Y(\theta_x, x) - \Lambda\theta_x$ с $M\beta_x = M_1(x)$, $M\beta_x^2 = M_2(x)$. Представление (20) очевидно

Теперь уравнение (15) представим в операторном разложении

$$[I - P - \sqrt{\varepsilon}\, izM_1(x)P + \varepsilon(M_2(x)z^2/2 + m(x)s)P + o_1(\varepsilon)]\, U_\varepsilon = \varepsilon m + o(\varepsilon). \tag{24}$$

Из выбора стационарного параметра интенсивности Λ (см. (4)) заключаем, что

$$\int_E \rho(dx)\, M_1(x) = \int_E \rho(dx)(\lambda(x) - \Lambda)\, m(x) = 0. \tag{25}$$

Теперь можно сформулировать требуемую предельную теорему обращения [13].

Теорема обращения. *При условии* (25) *имеет место*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon[I - P - \sqrt{\varepsilon}\, izM_1(x)P + \varepsilon B_2(x)P + o_1(\varepsilon)]^{-1} = C^{-1}\Pi. \tag{26}$$

Константа C вычисляется по формуле

$$C = z^2 \int_E \rho(dx)\, M_1(x)[R_0 - I]\, M_1(x) + \int_E \rho(dx)\, B_2(x). \tag{27}$$

Полагая

$$B_2(x) = M_2(x) z^2/2 + m(x) s, \tag{28}$$

и применяя к уравнению (24) теорему обращения (26), с учетом (27) и (28) получим утверждение теоремы (12) и (13).

Замечания. 1. По схеме, приведенной в работе [14], можно доказать сходимость конечномерных распределений процесса уклонений (9) к конечномерным распределениям нормального процесса с дисперсией σ^2.

2. В более общем случае, когда $Q(x, t, dy) = P(x, dy) G_{xy}(t)$, также имеет место центральная предельная теорема, только вычисление дисперсии σ^2 предельного закона осуществляется по другой формуле.

3. Проблема явного вычисления дисперсии предельного закона сводится к вычислению ядра потенциала R_0 вложенной цепи Маркова. Известны примеры, когда потенциал определяется в явном виде (см., например, [15, § 6.1] и [16].

4. Аналогичная техника может быть применена при доказательстве центральной предельной теоремы, когда переключающий полумарковский процесс $\varkappa_\varepsilon(t)$ зависит от параметра ε и допускает асимптотическое фазовое укрупнение [12].

1. *Сираждинов С. Х.* Предельные теоремы для однородных цепей Маркова.— Ташкент : Изд-во АН УзССР, 1955, гл. IV, с. 40.
2. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова.— Теор. вероятн. и ее примен., 1957, 4, № 2, с. 389—416.
3. *Статулявичус В. А.* Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова.— Литов. мат. сб., 1969, 9, № 3, с. 345—361 (с библиографией).
4. *Keilson J., Wishart D.* A central limit theorem for processes difened on a finite Markov chain.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1964, 60, p. 547—567.
5. *Сираждинов С. Х., Форманов Ш. К.* Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова.— Ташкент : Фан, 1979.— 172 с.
6. *Турбин А. Ф.* Предельные теоремы и асимптотические разложения для сингулярно возмущенных полугрупп операторов.— В кн.: Предельные теоремы для сингулярно возмущенных полугрупп и марковских процессов в схеме асимптотического фазового укрупнения. Киев, 1980, с. 13—41.— (Препринт / Ин-т математики АН УССР; 80.18).
7. *Хохель О. С.* Аддитивные функционалы от эргодических марковских процессов.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 3, с. 24—27.
8. *Дьячковский С. В., Хохель О. С.* Об одном варианте центральной предельной теоремы для аддитивных функционалов от марковских процессов в схеме асимптотического фазового укрупнения.— В кн.: Применение асимптотических методов в теории вероятностей. Киев : Изд. Ин-та математики АН УССР, 1983.
9. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций.— Киев : Вища школа, 1974.— 320 с.
10. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применение к дискретным схемам суммирования.— Киев : Вища школа, 1976.— 80 с.
11. *Анисимов В. В., Лукащук Л. И.* Сходимость некоторых многомерных характеристик ступенчатых процессов. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, №8, с. 5—8.
12. *Королюк В С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. Киев. Наук. думка, 1976.—182.
13. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 218 с.
14. *Королюк В. В.* Стохастические системы с полумарковскими переключениями.— Киев, 1983.— 36 с.— (Препринт / Ин-т кибернетики АН УССР; 83.35).
15. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем.— Киев : Наук. думка, 1982.— 234 с.
16. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.— Киев : Наук. думка, 1975.—137 с.

Институт математики
АН УССР, Киев

Поступила в редакцию
20.07.83