УДК 517.948

Н. И. Лисовец

Четырехэлементная краевая задача с кусочно-непрерывными коэффициентами со сдвигом на составном контуре

Большое число исследований по теории краевых задач для аналитических функций посвящено изучению граничной задачи со сдвигом и сопряжением (см. [1] и приведенную там библиографию). Эта задача состоит в отыскании кусочно-аналитической, вообще говоря, многосвязной области D^+ и ее дополнении D^- ($\ni\infty$) до $C\setminus\Gamma$ функции $\varphi^\pm$ по заданному на (составном) контуре краевому условию

$$a(t)\varphi^+[\alpha(t)]+b(t)\overline{\varphi^+[\alpha(t)]}=e(t)\varphi^-(t)+d(t)\overline{\varphi^-(t)}+g(t),\quad t\in\Gamma,\quad (1)$$

где сдвиг α — неособый H-гладкий диффеоморфизм Γ на себя. Такое внимание к задаче (1) объясняется многочисленными приложениями (1) и ее обобщений к проблеме жесткости кусочно-регулярных поверхностей [2], к теории упругости анизотропного тела [3, гл. 7] и т. д.

Задача (1) хорошо изучена (см. [1]) в случае, когда сдвиг α сохраняет либо изменяет ориентацию всего контура Γ и переводит каждую компоненту связности Γ на себя. Естественным обобщением такой постановки служит задача со сдвигом, переводящим компоненты связности Γ друг на друга, а также сохраняющим ориентацию одной части Γ и изменяющим ориентацию другой. Весьма общие трехэлементные ($a(t)\equiv 1$, $b(t)\equiv 0$, $t\in\Gamma$) задачи с таким сдвигом изучались в случае гельдеровских коэффициентов и свободного члена в ряде работ (см., например, [4]). Методика [4] следует классической схеме [3, 5, 6] и позволяет, в частности, получать достаточные условия нетеровости и вычислять индекс задачи, однако прямо не переносится на случай коэффициентов и свободного члена более общей природы.

В настоящей работе задача (1) рассматривается в пространстве $L_p=L_p(\Gamma,\rho)$ со степенным весом $\rho(t)=\prod_{j=0}^{k}|t-t_j|^{\beta_j}$, $t_j\in\Gamma$, $1<p<\infty$, $-1<\beta_j<p-1$, на составном ляпуновском контуре $\Gamma=\bigcup_{i=0}^{m-1}\Gamma_i$, охватывающим многосвязную область типа M. Свободный член $g\in\overset{0}{L}_p=L_p(\Gamma,\rho)$, φ^+ и φ^- ищутся в подпространствах $L_p^+=L_p^+(\Gamma,\rho)$ и $\overset{0}{L_p^-}=\overset{0}{L_p^-}(\Gamma,\rho)$, на которые L_p проектируются проекторами Рисса P и $Q\left(P=\frac{1}{2}(I+S),\ S\right.$ — оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши, $\left.Q=I-P\right)$.

В работе получены необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен индекс задачи (1). Предполагается, что сдвиг α с сохранением ориентации отображает на себя $\Gamma'=\bigcup_{i=0}^{\nu-1}\Gamma_i$ и с изменением ориентации отображает на себя $\Gamma''=\bigcup_{i=\nu}^{m-1}\Gamma_i$, коэффициенты (1) — кусочно-непрерывные функции.

Эти предположения оказывают существенное влияние на условия нетеровости и индекс (1) и делают невозможным применение классической схемы [3—6]. Поэтому изучение (1) заменяется исследованием эквивалентного сингулярного интегрального оператора со сдвигом и сопряжением, для которого строится нетеровый одновременно с ним и имеющий тот же индекс, что и задача (1), матричный сингулярный интегральный оператор. (Подчеркнем, что ввиду наличия в (1) комплексного сопряжения, индекс задачи (1) подсчитывается над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел.)

Отметим, что даже для задачи (1) без сдвига ($\alpha(t) = t$, $t \in \Gamma$) полученная в настоящей работе формула (8) для вычисления индекса обобщает и значительно упрощает соответствующую формулу из [7] (см. (6) и (9) в [7]), а условиям нетеровости (1) придан, на наш взгляд, более обозримый, чем в [7], вид.

Введем следующие обозначения:

$$z(t) = \begin{cases} \overline{a(t)}\, e(t) - b(t)\, \overline{d(t)}, & t \in \Gamma' \\ a(t)\, \overline{d(t)} - \overline{b(t)}\, e(t), & t \in \Gamma'' \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} \overline{a(t)}\, d(t) - b(t)\, \overline{e(t)}, & t \in \Gamma' \\ b(t)\, \overline{d(t)} - \overline{a(t)}\, e(t), & t \in \Gamma'' \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} |e(t)|^2 - |d(t)|^2, & t \in \Gamma' \\ |a(t)|^2 - |b(t)|^2, & t \in \Gamma'' \end{cases}, \quad v(t) = \begin{cases} |a(t)|^2 - |b(t)|^2, & t \in \Gamma' \\ |d(t)|^2 - |e(t)|^2, & t \in \Gamma'', \end{cases}$$

и в случае

$$\inf_{t \in \Gamma} |z(t)| > 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

определим в L_p^2 оператор

$$K = P + GQ, \tag{3}$$

где P и Q действуют покоординатно, а

$$G(t) = \frac{1}{\overline{z(t)}} \begin{pmatrix} u(t) & -y(t) \\ \overline{y(t)} & v(t) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Символом «$\simeq$» условимся обозначать равенство, выполненное с точностью до вполне непрерывного слагаемого, символами «$\pm$» — предельные значения (матриц) функций соответственно справа и слева, равенствами $(Wf)(f) = f[\alpha(t)]$ и $(Vf)(t) = \overline{f(t)}$ определим оператор сдвига и комплексного сопряжения.

Лемма 1. *Задача (1) нетерова в L_p тогда и только тогда, когда оператор K (3)—(4) нетеров в L_p^2. Индекс задачи (1) равен индексу оператора K, подсчитанному над полем C комплексных чисел.*

Доказательство. Задача (1) нетерова одновременно с оператором $A = aWP + bVWP + eQ + dVQ$ и имеет одинаковый с ним индекс. Оператор $A \simeq A'_W \oplus A''_W$, где $A'_W = A'(WP + Q)$, $A' \simeq (aP + eQ) + (dP + bQ)V$ и $A''_W = A''(WP + VQ)$, $A'' \simeq (dP + aQ) + (bP + eQ)V$, действует соответственно в $L_p(\Gamma', \rho)$ и $L_p(\Gamma'', \rho)$; $L_p(\Gamma, \rho) = L_p(\Gamma', \rho) \oplus L_p(\Gamma'', \rho)$. Оператор $WP + Q$ нетеров и имеет нулевой индекс в $L_p(\Gamma', \rho)$. Действительно, его регуляризатор $W^{-1}P + Q$ удовлетворяет равенству $V(WP + Q)V \simeq W \times (W^{-1}P + Q)$, откуда следует, что $\operatorname{Ind}(WP + Q) = \operatorname{Ind}(W^{-1}P + Q)$. Аналогичный факт справедлив и для $WP + VQ$. Значит, A'_W (A''_W) и A' (A'') нетеровы одновременно и их индексы совпадают. Воспользовавшись для каждого из операторов A' и A'' известным матричным равенством (см., например, [1, с. 398]), убеждаемся в том, что задача (1) нетерова одновременно с оператором $\hat{K} = XP + YQ$, где

$$X(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ \overline{b(t)} & \overline{e(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in \Gamma', \quad X(t) = \begin{pmatrix} d(t) & b(t) \\ \overline{e(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in \Gamma'',$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e(t) & b(t) \\ \overline{d(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in \Gamma', \; Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) & e(t) \\ \overline{b(t)} & \overline{d(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in \Gamma'',$$

а ее индекс (над $\mathbb{R}$) равен индексу $\hat{K}$ (над $\mathbb{C}$).

Необходимым условием нетеровости оператора $\hat{K}$ является (см., например, [8]) невырожденность X и Y, что эквивалентно (2). Из равенства $X^{-1}Y = G$ теперь получаем требуемое.

Заметим, что лемма 1 остается справедливой и в случае произвольных ограниченных измеримых a, b, e, d.

Критерий нетеровости сингулярного интегрального оператора $P + GQ$ с кусочно-непрерывной $(n \times n)$-матрицей-функцией G имеется, например, в работе [9]. Приведем его в удобной для нас форме.

Лемма 2.* *Для нетеровости в* $L_p^n(\Gamma, \rho)$, $\rho(t) = \prod_{j=0}^{k} |t - t_j|^{\beta^j}$ *оператора* $P + GQ$ *необходимо и достаточно, чтобы собственные числа* λ_{ji}, $i = \overline{1, n}$, *матрицы* $G_-^{-1} \cdot G_+$ *не лежали на луче* Λ_j, *проведенном из начала координат под углом* $\frac{2\pi}{p}(1 + \beta_j)$ *к положительной полуоси абсцисс,* $j = 0, \ldots, k$. *Если это условие выполнено, то*

$$\operatorname{Ind}(P + GQ) = \frac{1}{2\pi} \sum_j \{\arg\det G\}_{\gamma_j} + \frac{1}{2\pi} \sum_j \sum_{i=1}^{n} \arg \lambda_{ji} - r, \tag{5}$$

где γ_j — *дуги, на которые контур* Γ *разбивается точками разрыва функции* G, r — *число собственных чисел, аргументы которых превосходят* $\frac{2\pi}{p}(1 + \beta_j)$.

Здесь и всюду в дальнейшем аргумент выбирается из промежутка $[0, 2\pi)$. Положим $\beta(t_j) = \beta_j$, $\beta(t) = 0$, $t \neq t_j$, $j = \overline{0, k}$.

Введем на Γ следующие функции: $\delta(t) = \arg \frac{z(t+0)}{z(t-0)}$, $\theta = \frac{2\pi}{p} \times (1 + \beta) - \delta$,

$$R = \frac{|z_+|^2 + |z_-|^2 - |y_+ - y_-|^2 - (u_+ - u_-)(v_+ - v_-)}{|z_+ z_-|},$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & R \geqslant 2 \\ \arccos \frac{R}{2}, & |R| < 2, \\ \pi, & R \leqslant -2 \end{cases} \qquad e = \begin{cases} 0, & |\theta| < \eta, \\ \operatorname{sgn}\theta, & \eta \leqslant |\theta| < 2\pi - \eta, \\ 2\operatorname{sgn}\theta, & 2\pi - \eta \leqslant |\theta| < 2\pi. \end{cases}$$

Теорема 1. *Для нетеровости в* L_p *задачи (1) с кусочно-непрерывными коэффициентами* a, b, e, d *необходимо и достаточно, чтобы при* $t \in \Gamma$

$$z(t \pm 0) \neq 0, \tag{6}$$

$$\cos\theta \neq \cos\eta. \tag{7}$$

Индекс нетеровой задачи (1) вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} \sum_j \{\arg z(t)\}_{\gamma_j} + \sum \left(\frac{1}{\pi} \arg \frac{z(t_j + 0)}{z(t_j - 0)} + e(t_j) - 1 \right). \tag{8}$$

Здесь первая сумма берется по дугам, на которые Γ разбивается точками разрыва функции z, вторая — по всем точкам разрыва функции a, b, e, d.

Приведем набросок доказательства. Согласно лемме 1, нужно доказать эквивалентность (6)—(7) нетеровости оператора (3)—(4). Условие (6) обосновано при доказательстве леммы 1. Вычисляя собственные числа $\lambda_{1,2}$ матрицы $G_-^{-1} \cdot G_+$, получаем, что $\lambda_{1,2} = e^{i\delta}\mu_{1,2}$, где $\mu_{1,2} = \frac{R}{2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4} - 1}$. Отсюда $\arg\lambda_1 = \delta + \eta$, $\arg\lambda_2 = 2\pi + \delta - \eta$, если $\delta \in [0, \eta)$; $\arg\lambda_1 = \delta - \eta$, $\arg\lambda_2 = \delta + \eta$, если $\delta \in [\eta, 2\pi - \eta)$ и $\arg\lambda_1 = \delta + \eta - 2\pi$, $\arg\lambda_2 = \delta + \eta$,

* Эту лемму любезно сообщил автору И. М. Спитковский (см. также [10].

если $\delta \in [2\pi - \eta, 2\pi)$. Теперь уже эквивалентность (7) условию $\lambda_{1,2} \notin \Lambda_j$ усматривается непосредственно. Согласно лемме 2, получаем, что нетеровость задачи (1) эквивалентна (6), (7). Формула (8) является непосредственным следствием (5).

Теорема 1 дает, в частности, критерий нетеровости и формулу для вычисления индекса трехэлементной задачи (1) ($a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 0$) с кусочно-непрерывными коэффициентами e, d (см. [4]), а также обобщает и упрощает соответствующие результаты [7].

Приведем еще условия нетеровости и формулу для вычисления индекса двухэлементной задачи

$$\begin{aligned} \varphi^+[\alpha(t)] &= h(t)\varphi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma' \\ \varphi^+[\alpha(t)] &= h(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)} + g(t), \quad t \in \Gamma''. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим

$$\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{p}(1+\beta(t)) - \arg\dfrac{h(t+0)}{h(t-0)}, & t \in \Gamma' \\[2mm] \dfrac{2\pi}{p}(1+\beta(t)) - \arg\dfrac{h(t-0)}{h(t+0)}, & t \in \Gamma''. \end{cases}$$

Следствие. *Для нетеровости задачи* (9) *с кусочно-непрерывным коэффициентом* h *в* L_p *необходимо и достаточно, чтобы при* $t \in \Gamma$ *выполнялось* $h(t \pm 0) \neq 0$ *и* $\Delta(t) \neq 0$. *Индекс нетеровой задачи* (9) *равен*

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\sum_j \{\arg h\}_{\gamma_j \subset \Gamma'} - \frac{1}{\pi}\sum_j \{\arg h\}_{\gamma_j \subset \Gamma''} +$$

$$+ \sum_{t_j \in \Gamma'}\left(\frac{1}{\pi}\arg\frac{h(t_j+0)}{h(t_j-0)} + \operatorname{sgn}\Delta - 1\right) + \sum_{t_j \in \Gamma''}\left(\frac{1}{\pi}\arg\frac{h(t_j-0)}{h(t_j+0)} + \operatorname{sgn}\Delta - 1\right).$$

Здесь в первых двух слагаемых суммирование ведется по дугам, на которые разбивается точками разрыва h соответственно Γ' и Γ'', а в третьем и четвертом слагаемых — по точкам разрыва h на Γ' и Γ''.

1. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М. : Наука, 1977.— 448 с.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.— М. : Физматиздат, 1959.
3. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.— М. : Наука, 1970.
4. *Исаханов Р. С.* Об одной общей задаче для голоморфных функций.— Труды Тбилис. матем. ин-та АН ГрузССР, 1980, **65**, с. 99—109.
5. *Мусхелишвили Н. П.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Наука, 1980.
6. *Квеселава Д. А.* Некоторые граничные задачи теории функций.— Труды Тбилис. матем. ин-та АН ГрузССР, 1948, **16**, с. 39—80.
7. *Яцко А. И., Яцко С. И.* Обобщенная краевая задача Римана с кусочно-непрерывными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 5, с. 646—653.
8. *Крупник Н. Я.* Некоторые общие вопросы теории одномерных сингулярных операторов с матричными коэффициентами. — Матем. исследования, 1975, **42**, 91 — 113 с.
9. *Крупник Н. Я., Няга В. И.* О сингулярных интегральных операторах в случае наглядного контура.— Мат. исследования, 1975, **10**, № 1, 144—164.
10. *Карапетянц Н. К., Самко С. Г.* Сингулярные интегральные операторы со сдвигом Карлемана в случае кусочно-непрерывных коэффициентов.— Изв. вузов, математика, 1975, № 2, с. 43—54.

Госуниверситет,
Одесса

Поступила в редакцию 5.08.82
после переработки —
22. 01. 83.