УДК 519.21

Б. Мередов

О двусторонних оценках в одной предельной теореме

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $P\{X_k < x\} = V(x)$, $EX_1 = 0$, $DX_1 = 1$, $k \geqslant 0$.

Положим

$$F_v(x) = P\left\{(1 - v^2)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} v^k X_k < x\right\}; \qquad v \in]0;\ 1[;$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\, dt; \qquad \Delta_v = \sup_{x \in R_1} |F_v(x) - \Phi(x)|;$$

$$\Psi_{v,2} = (1 - v^2) \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} \int_{|x| > v^{-k}(1-v^2)^{-1/2}} x^2 dV(x) +$$

$$+ (1 - v^2)^{3/2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} v^{3k} \int_{|x| \leqslant v^{-k}(1-v^2)^{-1/2}} x^3 dV(x) \right| +$$

$$+ (1 - v^2)^2 \sum_{k=0}^{\infty} v^{4k} \int_{|x| \leqslant v^{-k}(1-v^2)^{-1/2}} x^4 dV(x) = \Lambda_{v,2} + |L_{v,3}| + L_{v,4}.$$

В сделанных выше предположениях $\Delta_v \to 0$ при $v \to 1$. Различные оценки остаточных членов в этом предельном соотношении даются в некоторых работах (см., например, [1]). Из них наиболее интересны двусторонние оценки, выраженные характеристикой $\Psi_{v,2}$. При применении этих оценок для более тонкого анализа структур остаточных членов характеристика $\Psi_{v,2}$ несколько неудобна. С целью устранения этих неудобств мы приводим для нее двусторонние оценки.

Сначала приведем верхнюю оценку:

$$|L_{v,3}| \leqslant (1-v^3)^{-1}(1-v^2)^{3/2}\Big|\int\limits_{|x|\leqslant(1-v^2)^{-1/2}} x^3 dV(x)\Big| + \Lambda_{v,2} \leqslant$$

$$\leqslant 2(1-v^2)^{1/2}\Big|\int\limits_{|x|\leqslant(1-v^2)^{-1/2}} x^3 dV(x)\Big| + \Lambda_{v,2}. \tag{1}$$

Аналогично,

$$L_{v,4} \leqslant (1-v^2)\int\limits_{|x|\leqslant(1-v^2)^{-1/2}} x^4 dV(x) + \Lambda_{v,2}. \tag{2}$$

Учитывая, что $\Lambda_{v,2} \leqslant \int\limits_{|x|>(1-v^2)^{-1/2}} x^2 dV(x)$, и (1), (2), получаем

$$\Psi_{v,2} \leqslant 3\Big(\int\limits_{|x|>(1-v^2)^{-1/2}} x^2 dV(x) + (1-v^2)^{1/2}\Big|\int\limits_{|x|\leqslant(1-v^2)^{-1/2}} x^2 dV(x)\Big| +$$

$$+ (1-v^2)\int\limits_{|x|\leqslant(1-v^2)^{-1/2}} x^4 dV(x)\Big) = 3\varphi_{v,2}. \tag{3}$$

При оценке $\Psi_{v,2}$ снизу, не уменьшая общности, предположим, что для $k \in [0, \infty[$ и $v \in]0, 1[$

$$\int\limits_{|x|>v^{-k}(1-v^2)^{-1/2}} x^2 dV(x) \neq 0.$$

Тогда в силу $DX_1 = 1$ существует достаточно малое положительное число ε такое, что

$$\int\limits_{|x|>v^{-k}(1-v^2)^{-1/2}} x^2 dV(x) \geqslant \varepsilon \int\limits_{|x|>(1-v^2)^{-1/2}} x^2 dV(x) = \varepsilon R((1-v^2)^{-1/2}).$$

Далее, $|L_{v,3}| \geqslant (1-v^3)^{-1}(1-v^2)^{3/2}\Big|\int\limits_{|x|\leqslant(1-v^2)^{-1/2}} x^3 dV(x)\Big|$, $L_{v,4} \geqslant (1-v^4)^{-1} \times$ $\times (1-v^2)^2 \int\limits_{|x|\leqslant(1-v^2)^{-1/2}} x^4 dV(x)$.

Таким образом,

$$\Psi_{v,2} \geqslant 3^{-1}\varepsilon\varphi_{v,2}. \tag{4}$$

Как видно, $\varphi_{v,2}$ имеет более простой вид и очень удобно для использования в различных задачах теории предельных теорем.

Приведем некоторые результаты, при доказательстве которых используются эти оценки.

Пусть G — множество функций $g(x)$, определенных для всех действительных x и удовлетворяющих следующим условиям: 1) $g(x)$ — неотрицательная, не убывающая при $x > 0$, четная функция; 2) существует $\delta > 0$ такое, что $g(x)\, x^{-\delta}$ не убывает и $g(x)\, x^{\delta-1}$ не возрастает при $x > 0$.

Теорема 1. А. *Если $g \in G$, то для сходимости интегралов*

$$\int\limits_0^1 (1-v)^{-1} g((1-v)^{-1/2})\, \Delta_v dv, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^1 (1-v)^{-1} g((1-v)^{-1/2})\, \omega_v(0)\, dv \tag{6}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$E[X_1^2 g(X_1)] < \infty. \tag{7}$$

Б. *Если* $g(x)$ — *не убывающая при* $x > 0$, *неотрицательная, четная, медленно меняющаяся функция такая, что для некоторого положительного* $\delta < 1$ $g(x) x^{-\delta}$ *не возрастает при* $x > 0$, *то условие*

$$E[X_1^2 g(X_1) \ln^+ |X_1|] < \infty, \tag{8}$$

достаточно для сходимости интегралов (1), (2). *Здесь* $\omega_v(0)$ — *характеристика, которая была введена в* [2].

Доказательство. А. Достаточность. Воспользовавшись теоремой 3 из [2], получим

$$\int_0^1 (1-v)^{-1} g((1-v)^{-1/2}) \Delta_v dv \leqslant A \int_1^\infty x^{-3/2} g(x^{1/2}) \int_{|y| \leqslant x^{1/2}} |y|^3 dV(y)\, dx +$$

$$+ A \int_1^\infty x^{-1} g(x^{1/2}) R(x^{1/2})\, dx = I_1 + I_2, \tag{9}$$

где A — абсолютная постоянная; $C_1, C_2, \ldots$ — большие положительные постоянные; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — достаточно малые положительные постоянные.

Далее,

$$I_2 \leqslant C_1 \sum_{n=1}^\infty R(n^{1/2}) \int_n^{n+1} x^{-1} g(x^{1/2})\, dx \leqslant C_2 \sum_{k=1}^\infty \int_{k^{1/2} < |x| \leqslant (k+1)^{1/2}} x^2 dV(x) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^k n^{-1} g(n^{1/2}) \leqslant C_3 \sum_{k=1}^\infty k^{-\delta/2} g(k^{1/2}) \int_{k^{1/2} < |y| \leqslant (k+1)^{1/2}} y^2 dV(y) \int_0^k x^{-1+\frac{\delta}{2}} dx \leqslant$$

$$\leqslant C_4 E[X_1^2 g(X_1)]. \tag{10}$$

$$I_1 \leqslant C_5 \sum_{n=1}^\infty n^{-3/2} g(n^{1/2}) \int_{|x| \leqslant n^{1/2}} |x|^3 dV(x) + C_6 \sum_{n=1}^\infty n^{-1} g(n^{1/2}) R(n^{1/2}) \leqslant$$

$$\leqslant C_7 E[X_1^2 g(X_1)] + C_8 \sum_{k=1}^\infty k^{-1/2} g(k^{1/2}) \int_{k^{1/2} < |x| \leqslant (k+1)^{1/2}} |x|^3 dV(x) \leqslant C_9 E[X_1^2 g(X_1)]. \tag{11}$$

Из (9) — (11) следует (5).

Необходимость. Из того, что выполнено условие (5), следует

$$\infty > \int_0^1 (1-v)^{-1} g((1-v)^{-1/2}) (1 - v + \Delta_v)\, dv - \int_0^1 g((1-v)^{-1/2})\, dv.$$

Так как $\int_0^1 g((1-v)^{-1/2})\, dv \leqslant \mathrm{const} < \infty$ и $1 - v + \Delta_v \geqslant \varepsilon_1 \Psi_{v,2}$, что следует из [1], заключаем, что

$$\int_0^1 (1-v)^{-1} g((1-v)^{-1/2}) \Psi_{v,2} dv < \infty,$$

отсюда $\int_0^1 (1-v)^{-1} g((1-v)^{-1/2}) \varphi_{v,2} dv < \infty$.

Тогда тем более

$$\int_0^1 (1-v)^{-1} g((1-v)^{-1/2}) R((1-v)^{-1/2})\, dv < \infty.$$

Поэтому

$$\int_1^\infty x^{-1} g(x^{1/2}) R(x^{1/2})\, dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-1} g((n+1)^{1/2}) R((n+1)^{1/2}) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \int\limits_{k^{1/2}<|x|\leqslant(k+1)^{1/2}} x^2 dV(x) \sum_{n=1}^{k} n^{-1} g(n^{1/2}) \geqslant \varepsilon_2 \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1}(k-1) \times$$

$$\times g^{-1}((k+1)^{1/2})\, g(k^{1/2}) \int\limits_{k^{1/2}<|x|\leqslant(k+1)^{1/2}} x^2 g(x)\, dV(x) \geqslant \varepsilon_3 E[X_1^2 g(X_1)].$$

После этих рассуждений становится очевидным равносильность условий (6) и (7).

Достаточность условия (8) доказывается очень просто.

Обозначим

$$\| g(x) \|_s = \left(\int_1^\infty | g(x) |^s x^{-1} dx \right)^{1/s}, \quad s \in [1, \infty[,$$

$$\| g(x) \|_\infty = \sup_{x\in[1,\infty[} | g(x) |,$$

$$N_s = \left(\int_0^1 (g((1-v)^{-1}) \Delta_v)^s (1-v)^{-1} dv \right)^{1/s}, \quad s \in [1, \infty[,$$

$$N_\infty = \sup_{v\in]0,1[} | g((1-v)^{-1}) \Delta_v |, \quad \beta_3(x) = \int\limits_{|y|\leqslant x^{1/2}} y^3 dV(y).$$

Теорема 2. *Пусть вещественная функция $g(x)$ удовлетворяет следующему набору условий:*

при $x \geqslant x_\tau$, $\tau \in]0, 1[$; $x^{-\tau} g(x)$, *при некотором* $s \in [1, \infty]$ $\| g(x) \|_s = \infty$; $\| x^{-1/2} g(x) \|_s < \infty$. *Условие*

$$N_s < \infty \tag{12}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\| g(x^2) R(x) \|_s < \infty, \tag{13}$$

и $\tau \geqslant 1/2$. *Кроме того,*

$$\| x^{-1} g(x^2) \beta_3(x) \|_s < \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Необходимость. С учетом теоремы 3 из работы [1] и нижней оценки для $\Psi_{v,2}$ получим

$$M_s = \left(\int_0^1 (g((1-v)^{-1}) \Delta_v + (1-v)\, g((1-v)^{-1}))^s (1-v)^{-1} dv \right)^{1/s} \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_4 \left(\int_0^1 (g((1-v)^{-1})\, \varphi_{v,2})^s (1-v)^{-1} dv \right)^{1/s}. \tag{15}$$

Так как $N_s < \infty$ и $\| x^{-1/2} g(x) \|_s < \infty$, то из неравенства $M_s \leqslant N_s + \left(\int_0^1 ((1-v)\, g((1-v)^{-1}))^s (1-v)^{-1} dv \right)^{1/s}$ следует, что

$$\left(\int_0^1 (g((1-v)^{-1})\, \varphi_{v,2})^s (1-v)^{-1} dv \right)^{1/s} < \infty. \tag{16}$$

Отсюда

$$\left(\int_0^1 (g((1-v)^{-1}) R((1-v)^{-1/2}))^s (1-v)^{-1} dv \right)^{1/s} < \infty, \tag{17}$$

что совпадает с условием (13). Из (16) также следует, что

$$\left(\int_0^1 \left(g\left((1-v)^{-1}\right)(1-v)^{1/2} \left| \int_{|x| \leqslant (1-v)^{-1/2}} x^3 dV(x) \right|\right)^s (1-v)^{-1} dv\right)^{1/s} < \infty.$$

Достаточность. Используя соответствующую оценку из [3], получаем $\Delta_v \leqslant C_{10} (\Psi_{v,2} + (1-v)^{1/2})$. Применяя оценку $\Psi_{v,2} \leqslant 3\varphi_{v,2}$, запишем

$$N_s \leqslant C_{11} \left(1 + \| x^{-1} g(x^2) \beta_3(x) \|_s + \left\| x^{-2} g(x^2) \int_0^x uR(u)\, du \right\|_s\right).$$

Известно [4], что

$$\left\| x^{-2} g(x^2) \int_0^x uR(u)\, du \right\|_s \leqslant \frac{1}{2-2\tau} \| g(x^2) R(x) \|_s.$$

Из [4] также следует, что

$$\| x^{-1} g(x^2) \beta_3(x) \|_s \leqslant \left\| x^{-1} g(x^2) \int_0^x R(u)\, du \right\|_s \leqslant \frac{1}{1-2\tau} \| g(x^2) R(x) \|_s.$$

Если $\tau < 1/2$, то условие (14) излишне, так как в этом случае оно следует из (13), поскольку

$$x^{-1} | \beta_3(x) | \leqslant x^{-1} \int_0^x R(u)\, du; \qquad x > 0.$$

1. *Мередов Б.* О скорости сходимости к нормальному распределению в L_p.— Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 3, с. 415—421.
2. *Азларов Т. А., Мередов Б.* Некоторые оценки в предельной теореме для суммирования случайных величин по Абелю.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1977, № 5, с. 7—15.
3. *Мередов Б.* О некоторых оценках остаточного члена в центральной предельной теореме для одной схемы суммирования независимых случайных величин.— В кн.: Тез. докл. II Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1977, **2**, с. 25—26.
4. *Розовский Л. В.* Оценки скорости сходимости в слабом законе больших чисел.— Литов. мат. сб., 1980, **20**, № 4, с. 147—163.

Туркменский
государственный университет

Поступила в редакцию
28.09.82