УДК 517.988/.988.68

*Е. Э. Пасика*

# Пример дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве без непрерывной зависимости решения от начального условия

Рассмотрим в банаховом пространстве $X$ задачу Коши

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $f(t, x)$ — непрерывная функция, действующая из $I \times E$ в $E$, где $I$ — конечный или бесконечный отрезок действительной оси, $E$ — открытое множество пространства $X$.

В случае $X = R^n$ известны хорошие достаточные условия существования решения, его единственности, непрерывной зависимости от начальных условий и параметров. К сожалению, далеко не все они переносятся в бесконечномерный случай. Так, например, одна из наиболее сильных теорем существования — теорема Пеано — верна только в конечномерных банаховых пространствах [1].

Рассмотрим следующую, справедливую в конечномерном случае, теорему о непрерывной зависимости.

Теорема [2]. *Пусть для каждого начального условия* $(t_0, x_0) \in I \times E$ *задача Коши* (1) *имеет на* $I$ *единственное решение* $x(t) = \xi(t, t_0, x_0)$. *Тогда функция* $\xi(t, t_0, x_0)$ *непрерывна по* $x_0$ *при любых фиксированных* $t_0 \in I, t \in I$.

Цель настоящей статьи — показать, что в гильбертовом пространстве $l_2$ эта теорема не верна, т. е. на бесконечномерный случай она не переносится. Для этого приведем в $l_2$ пример автономного дифференциального уравнения первого порядка с непрерывной правой частью, имеющего в точности одно решение при любом начальном условии, но не обладающего устойчивостью решения относительно малых возмущений начального условия.

Как обычно, будем обозначать через $\{e_n\}_1^\infty$ канонический базис, а через $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение, так что каждый элемент $x \in l_2$ представится в виде $x = \Sigma \langle x, e_n\rangle e_n$.

Зафиксируем числовую последовательность $b_1 > a_1 > b_2 > a_2 > \ldots$ такую, что $a_n = 1/(2n+1)$, $b_n = 1/2n$, и для каждого $n$ определим непрерывную функцию $q_n(\eta): R^+ \to [0, 1]$, равную нулю при $0 \leqslant \eta \leqslant a_n$, равную единице при $\eta \geqslant b_n$ и линейную на отрезке $[a_n, b_n]$. Далее определим отображение $Q(x)$ пространства $l_2$ в себя формулой $Q(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n(\|x\|)\langle x, e_n\rangle e_n$.

Отметим важные для дальнейшего свойства отображения $Q(x)$:

1) функция $Q(x)$ непрерывна на всем $l_2$ и локально липшицева на $l_2 \setminus \{0\}$;

2) если $\|x\| \geqslant b_1$, то $Q(x) = x$;

3) если $\|x\| \geqslant b_n$ и $\langle x, e_k\rangle = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то $Q(x) = x$;

4) если $\|x\| \leqslant a_n$, то $\langle Q(x), e_k\rangle = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Уравнение с требуемыми свойствами определим так:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)),\ x(t) \in l_2,\ t \in R, \tag{2}$$

где $F(x) = Q(x)/\sqrt{\|x\|}$ при $x \neq 0$ и $F(x) = 0$ при $x = 0$.

Покажем, что при любом начальном условии уравнение (2) имеет единственное решение на всей оси (глобальное решение). Для этого заметим, что уравнение (2) обладает следующими свойствами:

5) правая часть уравнения (2) непрерывна на всем $l_2$ и локально липшицева на $l_2 \setminus \{0\}$;

6) (следует из 5) никакие два различные локальные (а значит, и глобальные) решения уравнения (2), не проходящие через нуль пространства $l_2$, не пересекаются;

7) если $x(t)$ локальное или глобальное решение уравнения (2), то $\|x(t)\|$ не убывает с ростом $t$ (действительно, для любого $n$ функция $|x_n(t)| \equiv |\langle x(t), e_n\rangle|$ не убывает, так как $x_n'(t) = q_n(\|x(t)\|)\, x_n(t)$ и $q_n(\|x(t)\|) \geqslant 0$);

8) (следует из 6), 2), 3)) для любых $t_0 \in R$ и $1 \leqslant n < +\infty$ единственным решением уравнения (2) на $[t_0, +\infty)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ таким, что $\|x_0\| \geqslant b_n$ и при $n \geqslant 2$ $\langle x_0, e_k\rangle = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, является $x(t) = x_0(t - t_0 + 2\sqrt{\|x_0\|})^2/4\|x_0\|$.

Если $x(t)$ — решение уравнения (2) на произвольном ограниченном интервале $(a, b) \subset R$, то:

9) $\sup\{\|x(t)\| : t \in (a, b)\} < +\infty$ (действительно, если это не так, то найдется такое $\tau \in (a, b)$, что $\|x(\tau)\| \geqslant b_1$, и тогда, в силу 8), $\sup\{\|x(t)\| : t \in [\tau, b)\} < +\infty$, а в силу 7) — $\sup\{\|x(t)\| : t \in (a, \tau)\} \leqslant \|x(\tau)\| < +\infty$);

10) решение $x(t)$ можно продолжить за точки $a$ и $b$. Приведем рассуждения для точки $a$. Из 9) и неравенства $\|F(x)\| \leqslant \sqrt{\|x\|}$ следует суще-

ствование предела справа функции $x(t)$ в точке $a$, который будем обозначать $x^*$. Если $x^* \neq 0$, то продолжение возможно, в силу 5). Если $x^* = 0$, то продолжаем $x(t)$ влево за точку $a$ тождественным нулем. Дифференцируемость продолженной функции $x(t)$ в точке $a$ следует из равенства $F(x^*) = F(\lim\limits_{t\to a+0} x(t)) = \lim\limits_{t\to a+0} F(x(t))$. Для точки $b$ все делается аналогично;

11) (следует из 10)) решение $x(t)$ можно продолжить на всю ось.

Далее, в силу автономности уравнения (2), будем, не ограничивая общности, задавать начальные условия в точке $t_0 = 0$. Из 5), 11) следует существование глобального решения уравнения (2) с ненулевым начальным условием ($x(0) = x_0 \neq 0$), а его единственность следует из 6). При начальном условии $x(0) = 0$ уравнение (2) имеет решение $x(t) \equiv 0$. Покажем, что оно единственно.

Допустим, что существует решение $u(t)$ с тем же начальным условием $u(0) = 0$, но не равное тождественно нулю. В силу автономности уравнения (2) и свойства 7), мы можем, не ограничивая общности, считать, что

$$u(t) = 0 \text{ при } t \leqslant 0, \ \| u(t) \| > 0 \text{ при } t > 0. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение последовательность значений аргумента $t_1 > s_1 > t_2 > s_2 > \ldots$ такую, что $\lim t_n = \lim s_n = 0$, с помощью равенств $\| u(s_n) \| = a_{n+n^*}$, $\| u(t_n) \| = b_{n+n^*}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $n^* = \inf \{k : b_k \leqslant \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \| u(t) \|\}$. Для упрощения выкладок будем считать, что $n^* = 0$. Тогда получаем

$$\| u(s_n) \| = a_n, \ \| u(t_n) \| = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

При любом $n$, в силу 4) и так как $u(0) = 0$, справедливо равенство

$$\langle u(t), e_n \rangle = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant t_{n+1} < s_n, \tag{5}$$

откуда, в силу 8) и (4), решение в промежутке $[t_n, +\infty)$ имеет вид $u(t) = u(t_n) \cdot (t - t_n + 2\sqrt{b_n})^2 / 4b_n$. Отсюда, в силу (5), получаем, что все компоненты вектора $u(t_1)$ равны нулю. Полученное противоречие с (3) и доказывает единственность решения при нулевом начальном условии.

Возьмем, наконец, последовательность начальных условий $x^{(n)}(0) = x_0^{(n)} = b_n e_n$ и построим соответствующую последовательность решений $x^{(n)}(t)$, которые в силу 8) имеют на $[0, +\infty]$ вид $x^{(n)}(t) = (t + 2\sqrt{b_n})^2 e_n/4$. Очевидно, что $x^{(n)}(t)$ не стремится к нулю ни при каком $t > 0$, тогда как $x_0^{(n)} \to 0$.

Аналогичный пример может быть построен в любом бесконечномерном банаховом пространстве с базисом.

1. *Годунов А. Н.* О теореме Пеано в банаховых пространствах.— Функциональный анализ и его прилож., 1975, 9, № 1, с. 61—62.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.

Ин-т инженеров коммунального строительства,
Харьков

Поступила в редакцию
30.09.82