УДК 518:517.948

Н. И. Ронто

Сходимость метода тригонометрической коллокации для нелинейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Исследование метода тригонометрической коллокации для приближенного отыскания и установления существования периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений выполнено в работе [1]. В [2] доказана сходимость метода и предложена формализация процесса получения определяющей системы алгебраических уравнений в случае применения метода коллокации к линейным периодическим системам с запаздывающим аргументом.

В настоящей работе эти результаты распространяются на нелинейные периодические системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1}$$

где τ — постоянное запаздывание, $0 < \tau < T$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$; $f(t, x, y) = (f_1(t, x, y), \ldots, f_n(t, x, y))$ — вектор-функция со значениями в E_n, определенная, непрерывная по t, x, y для $t \in (-\infty, \infty)$, $x \in D \subset E_n$, $y \in D_1 \subset E_n$ и периодическая по t с периодом T.

Предполагая, что существует T-периодическое решение $x^0 = x^0(t)$ системы уравнений (1), для его приближенного построения установим сходимость метода тригонометрической коллокации и оценим погрешность найденного приближенного решения. При этом приближенное T-периодическое решение ищем в виде векторного тригонометрического полинома

$$x_m(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{m} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t), \quad \omega = 2\pi/T, \tag{2}$$

где $a_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, $b_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jn})$, $x_m(t) = (x_{m1}(t), \ldots, x_{mn}(t))$, причем векторы коэффициентов

$$x_j^{\Gamma} = (a_{0j}, a_{1j}, b_{1j}, \ldots, a_{mj}, b_{mj}), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

находятся из условия, чтобы приближенное решение (2) удовлетворяло уравнению (1) в $N = 2m + 1$ узлах коллокации t_i, выбранных равностоящими на отрезке $[0, T]$,

$$t_i = i\frac{T}{N}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{4}$$

т. е. из системы определяющих алгебраических уравнений метода тригонометрической коллокации

$$\dot{x}_m(t_i) = f(t_i, x_m(t_i), x_m(t_i - \tau)), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Имеет место утверждение.

Теорема. *Предположим, что $x^0 = x^0(t)$ — периодическое периода T решение периодической системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* (1). *Функция $f(t, x, y)$ и матрицы*

$$F^x(t, x, y) = (\partial f(t, x, y)/\partial x), \qquad F^y(t, x, y) = (\partial f(t, x, y)/\partial y)$$

определены и непрерывны при

$$t \in [0, T], \quad |x - x^0|_C \leqslant \delta, \quad |y - y^0|_C \leqslant \delta, \quad \delta > 0$$

$$\left(|x(t)|_C = \max_{i=1,2,\ldots n} \max_{t \in [0,T]} |x_i(t)|\right). \tag{6}$$

Кроме того, однородное линейное уравнение в вариациях относительно решения $x^0(t)$

$$\dot{x}(t) = F^x(t, x^0(t), x^0(t-\tau))\, x(t) + F^y(t, x^0(t), x^0(t-\tau))\, x(t-\tau) \tag{7}$$

не имеет T-периодических решений кроме тривиального.

Тогда:

1. *Существует такое $\varkappa > 0$, что в шаре*

$$|\dot{x} + x - (\dot{x}^0 + x^0)|_2 \leqslant \varkappa, \tag{8}$$

$$\left(|x(t)|_2 = \max_{i=1,2,\ldots,n} \left[\int_0^T |x_i(s)|^2\, ds\right]^{\frac{1}{2}}\right)$$

решение $x^0(t)$ периодической системы (1) *единственно.*

2. *При достаточно больших $m \geqslant m_0$ метод тригонометрической коллокации* (5), (4), (2) *определяет в области* (8) *единственное приближенное T-периодическое решение.*

3. *Последовательность приближенных T-периодических решений $x_m(t)$ при $m \to \infty$ сходится к точному решению $x^0(t)$ в равномерной метрике непрерывных на* $[0, T]$ *вектор-функций пространства* $C[0, T]$, *а* $\dot{x}_m(t)$ *сходится к* $\dot{x}^0(t)$ *в среднеквадратической метрике пространства* $L^2[0, T]$, *причем верны оценки:*

$$|x_m(t) - x^0(t)|_C \leqslant c_1 E_m(v^0), \tag{9}$$

$$|\dot{x}_m(t) - \dot{x}^0(t)|_2 \leqslant c_2 E_m(v^0), \tag{10}$$

где

$$v^0(t) = x^0(t) + \dot{x}^0(t), \qquad E_m(v^0) = \max_{i=1,2,\ldots,n} E_m(v_i^0),$$

$E_m(v_i^0)$ — *наилучшее равномерное приближение функции $v_i^0(t)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше m, c_1, c_2 — не зависящие от m константы.*

Доказательство основано на сведении исходной периодической краевой задачи (1) и системы определяющих алгебраических уравнений метода коллокации (5) к равносильным им операторным уравнениям в пространстве $L^2[0, T]$ с вполне непрерывными операторами и последующим применением результатов работы [3] о приближенных решениях операторных уравнений.

Обозначим через $G(t, s)$ матрицу Грина дифференциального выражения $\dot{x}(t) + x(t) = 0$ при периодических краевых условиях $x(0) = x(T)$. Нетрудно получить, что

$$G(t, s) = \begin{cases} e^{-Et}[E - e^{-ET}]^{-1} e^{Es}, & s < t, \\ e^{-Et}[(E - e^{-ET})^{-1} e^{-ET}]\, e^{Es}, & s \geqslant t. \end{cases}$$

Производя замены $\dot{x}(t) + x(t) = v(t)$, $\dot{x}_m(t) + x_m(t) = v_m(t)$ и учитывая [4], что для периодической системы уравнений (1) начальная функция на множестве $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ определяется функцией, являющейся периодическим продолжением решения на начальное множество, имеем:

$$x(t) = \int_0^T G(t, s)\, v(s)\, ds, \qquad x_m(t) = \int_0^T G(t, s)\, v_m(s)\, ds;$$

$$x(t-\tau) = \int_0^T G(t-\tau, s)\, v(s)\, ds, \qquad x_m(t-\tau) = \int_0^T G(t-\tau, s)\, v_m(s)\, ds, \quad t \geqslant \tau;$$

$$x(t-\tau) = \int_0^T G(T-\tau+t, s)\, v(s)\, ds, \qquad x_m(t-\tau) = \int_0^T G(T-\tau+t, s) \times \\ \times v_m(s)\, ds, \quad t < \tau. \tag{11}$$

В силу свойств матрицы $G(t, s)$ нетрудно установить, что операторы

$$Gv = \int_0^T G(t, s)\, v(s)\, ds; \qquad G_\tau v = \int_0^T G(t-\tau, s)\, v(s)\, ds, \quad t \geqslant \tau,$$

$$G_\tau v = \int_0^T G(T-\tau+t, s)\, v(s)\, ds, \quad t < \tau,$$

являются линейными вполне непрерывными операторами из пространства $L^2[0, T]$ в пространство $C[0, T]$. Ограниченность операторов G, G_τ позволяет в пространстве $L^2 [0, T]$ выбрать шар

$$|v - v^0|_2 \leqslant \varkappa_1 \tag{12}$$

такого радиуса $\varkappa_1$, чтобы функции $x = Gv$ и $y = G_\tau v$ удовлетворяли условию (6). Тогда, если на шаре (12) рассмотреть оператор K как оператор, действующий из пространства $L^2 [0, T]$ в пространство $C [0, T]$,

$$Kv = f(t, Gv, G_\tau v) + Gv, \tag{13}$$

то из непрерывности $f(t, x, y)$ и вполне непрерывности операторов G, G_τ имеем, что K является вполне непрерывным.

Обозначив через P оператор вложения пространства $C [0, T]$ в пространство $L^2 [0, T]$, имеем, что периодическая краевая задача (1) равносильна операторному уравнению

$$v = PKv. \tag{14}$$

Если ввести в рассмотрение линейный оператор P_m, который сопоставляет каждой непрерывной T-периодической функции ее тригонометрический интерполяционный многочлен порядка m, построенный по равноотстоящим точкам (4), то систему определяющих уравнений (5) можно записать в виде

$$P_m v_m = P_m K v_m. \tag{15}$$

В силу того, что $v_m(t)$ — тригонометрический полином порядка m, то $P_m v_m = v_m$, что позволяет (15) свести к следующему операторному уравнению:

$$v_m = P_m K v_m. \tag{16}$$

Из теории интерполирования известно, что выбор равноотстоящих точек (4) обеспечивает среднеквадратическую сходимость тригонометрического интерполяционного полинома к приближаемой непрерывной периодической функции. Поэтому имеет место сильная сходимость последовательности операторов $P_m : C [0, T] \to L^2 [0, T]$ к оператору $P : C [0, T] \to L^2 [0, T]$ и, следовательно, согласно теореме Банаха—Штейнгауза, $\| P_m \| \leqslant c_4 = \mathrm{const}$ для всех $m = 1, 2, \ldots$.

Из (11) видно, что решение v^0 операторного уравнения (14) и T-периодическое решение $x^0(t)$ уравнения (1) связаны следующими зависимостями: $v^0 = \dot{x}^0 + x^0$, $x^0 = Gv^0$.

Так как уравнение (7) имеет лишь тривиальное T-периодическое решение, то и уравнение

$$v - PK'(v^0)\, v = 0, \qquad K'(v^0) = \left(\frac{\partial f(t, Gv^0, G_\tau v^0)}{\partial x}\right) G + \left(\frac{\partial f(t, Gv^0, G_\tau v^0)}{\partial y}\right) G_\tau + G,$$

имеет только нулевое решение. Поэтому можно сделать вывод, что v^0 — изолированное решение уравнения (14) с ненулевым индексом.

Ясно, что K вполне непрерывный и как оператор $K : L^2 [0, T] \to \to L^2 [0, T]$. Тогда, рассматривая (14), (16) как уравнения в пространстве $L^2 [0, T]$, видим, что для них выполнены все условия теоремы 3, доказанной в работе [3]. На ее основании можно заключить, что решение v^0 уравнения (14) единственно в шаре $|v - v^0|_2 \leqslant \varkappa$ и при $m \geqslant m_0$ (16) имеет в этом шаре единственное решение v_m, причем

$$|v_m - v^0|_2 \leqslant c_3 |v^0 - P_m P^{-1} v^0|_2, \quad c_3 = \mathrm{const}, \tag{17}$$

и при $m \to \infty$ $|v_m - v^0|_2 \to 0$, где под $P^{-1} v^0$ понимается, что v^0 рассматривается как элемент пространства $C [0, T]$.

Неравенство (9) получается из (17) следующим образом:

$$|v_m - v^0|_2 \leqslant c_3 (|v^0 - p_m|_2 + |P_m P^{-1} (v^0 - p_m)|_2) \leqslant$$
$$\leqslant c_3 \max_{i=1,2,\ldots,n} [|v_i^0 - p_{mi}|_2 + |P_m P^{-1} (v_i^0 - p_{mi})|_2] \leqslant$$

$$\leqslant c_3 (T^{\frac{1}{2}} + c_4) \max_{i=1,2,\ldots,n} \max_{t\in[0,T]} | v_i^0 (t) - p_{mi} (t) |,$$

где $p_m (t)$ — произвольный векторный тригонометрический полином порядка не выше m. Ввиду произвольности $p_m (t)$

$$| v_m - v^0 |_2 \leqslant c_3 (T^{\frac{1}{2}} + c_4) \max_{i=1,2,\ldots,n} E_m (v_i^0) = c_2 E_m (v^0).$$

Принимая во внимание соотношение $x_m (t) - x^0 (t) = \int\limits_0^T G (t, s) (v_m (s) - v^0 (s)) ds$, аналогично как в теореме 18.1 из [1, с. 106] несложно установить справедливость и оценки (10). Вывод о равномерной и среднеквадратической сходимости соответственно последовательностей $\{x_m (t)\}$, $\{\dot{x}_m (t)\}$ непосредственно следует из оценок (9), (10). Теорема доказана.

Заметим, что система определяющих уравнений метода тригонометрической коллокации несколько проще может быть составлена относительно векторов значений $x_j^M = (x_{mj} (t_0), x_{mj} (t_1), \ldots, x_{mj} (t_{2m}))$, $j = 1, 2, \ldots, n$, тригонометрического полинома $x_m (t)$. Используя развитый в [1, 2] матрично-векторный аппарат оперирования с векторами значений и коэффициентов тригонометрических полиномов и их производных, уравнение (5) можно преобразовать к следующей системе алгебраических уравнений относительно векторов значений $x^M = (x_1^M, x_2^M, \ldots, x_n^M)$:

$$\begin{aligned} D^1 x_1^M &= F_1 (t_i, x^M (i), E^\tau x^M (i)), \\ D^1 x_2^M &= F_2 (t_i, x^M (i), E^\tau x^M (i)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^1 x_n^M &= F_n (t_i, x^M (i), E^\tau x^M (i)), \end{aligned}$$

где

$$F_k (t_i, x^M (i), E^\tau x^M (i)) = F_k (t_i, x_1^M (i), \ldots, x_n^M (i), E^\tau x_1^M (i), \ldots, E^\tau x_n^M (i)) =$$
$$= (f_k (t_0, x^M (1), E^\tau x^M (1)), \ldots, f_k (t_{2m}, x^M (N), E^\tau x^M (N))), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

индекс i в круглых скобках при векторе показывает, что берется i-я координата этого вектора, D^1, E^τ — известные постоянные матрицы.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— К.: Вища школа, 1976.— 180 с.
2. *Ронто Н. И.* О методе коллокации для линейных периодических систем с запаздывающим аргументом.— Электронное моделирование, 1980, № 3, с. 48—52.
3. *Вайникко Г.* О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1966, 6, № 1, с. 35—42.
4. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 296 с.

Институт проблем моделирования
в энергетике АН УССР, Киев

Поступила в редакцию
27.05.82