УДК 517.5

В. Г. Хрыптун, Б. С. Сикора

Представление бесконечно дифференцируемой функции в виде суммы двух функций, принадлежащих квазианалитическим классам

В этой заметке теорема С. Мандельбройта [1] о представлении бесконечно дифференцируемой функции одной независимой переменной в виде суммы двух функций, принадлежащих квазианалитическим классам, переносится на функции $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, нескольких вещественных переменных, бесконечно дифференцируемые в произвольно ориентированном замкнутом ограниченном n-мерном кубе $D(x_0, 2\delta)$ с центром в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и с длиной ребер 2δ. Доказывается следующая теорема, улучшающая результат работы [2].

Теорема. *Функция $f(x)$, бесконечно дифференцируемая в замкнутом ограниченном n-мерном кубе, является суммой двух функций, принадлежащих элементарным квазианалитическим классам функций.*

Класс $C_n\{M_i(q)\}$ бесконечно дифференцируемых в $D(x_0, 2\delta)$ функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|D_x^k f(x)| \leqslant C^k M_1(k_1) M_2(k_2) \ldots M_n(k_n), \tag{1}$$

где $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $D_x^k = (\partial/\partial x_1)^{k_1} (\partial/\partial x_2)^{k_2} \ldots (\partial/\partial x_n)^{k_n}$, постоянная C зависит от функции $f(x)$, а последовательности положительных чисел $M_i(q)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, одни и те же для всех функций класса, называются элементарным квазианалитическим классом, если последовательности $M_i(q)$ логарифмически выпуклы по q и удовлетворяют условиям

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{M_i(q-1)}{M_i(q)} = +\infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Доказательство теоремы разделяем на две части: 1) разлагаем функцию $f(x)$ в ряд по многочленам Чебышева и находим оценки частных производных членов ряда; 2) с помощью вспомогательных функций и последовательностей, построенных в [2, с. 295—296], разбиваем ряд, представляющий $f(x)$, на сумму двух рядов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и показываем, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежат элементарным квазианалитическим классам функций.

1. Ряды по многочленам Чебышева. Пусть e_j — единичные координатные векторы в n-мерном пространстве, l_i—ребра куба $D(x_0, 2\delta)$, выходящие из одной вершины, $u_{j,i}$—направляющие косинусы ребер l_i, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Преобразование $t = v(x) \equiv (v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x))$, отображающее куб $D(x_0, 2\delta)$ на куб $D(0, 2) = \{t, -1 \leqslant t_i \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$, определяется формулами $t_i = v_i(x) \equiv [(x_1 - x_1^0) u_{i,1} + \ldots + (x_n - x_n^0) u_{i,n}]/\delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а обратное к v преобразование $x = v^{-1}(t) \equiv (v_1^{-1}(t), v_2^{-1}(t), \ldots, v_n^{-1}(t))$, отображающее куб $D(0, 2)$ на куб $D(x_0, 2\delta)$, — формулами $x_i = v_i^{-1}(t) \equiv x_i^0 + \delta(t_1 u_{1,i} + \ldots + t_n u_{n,i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $T_k(y) = \cos(k \arccos y)$ — многочлены Чебышева, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, $\lambda_\nu = 2^{-q}$, где q — количество равных нулю индексов $\nu_i \in \nu$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $g(t) = f[v^{-1}(t)]$, $\varphi(z) = g(\cos z_1, \cos z_2, \ldots, \cos z_n)$.

Лемма 1. *Бесконечно дифференцируемая в кубе $D(x_0, 2\delta)$ функция $f(x)$ разлагается в этом кубе в равномерно сходящийся ряд по многочленам Чебышева*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu a_\nu \prod_{i=1}^{n} T_{\nu_i}(v_i(x)), \tag{3}$$

где $a_\nu = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int\limits_\sigma \varphi(z) \cos \nu_1 z_1 \ldots \cos \nu_n z_n \, dz_1 \ldots dz_n$, $\sigma = \{z, 0 \leqslant z_i \leqslant \pi, i = 1, 2, \ldots, n\}$ *и в n-кратной сумме каждый индекс $\nu_i \in \boldsymbol{\nu}$ меняется от нуля до бесконечности независимо от остальных индексов.*

Доказательство. Функция $\varphi(z)$ разлагается в кубе σ в равномерно сходящийся ряд Фурье по косинусам с коэффициентами $\lambda_\nu a_\nu$. После замены переменных $z_i = \arccos v_i(x)$ куб σ переходит в куб $D(x_0, 2\delta)$, функция $\varphi(z)$ — в функцию $f(x)$, а ряд Фурье функции $\varphi(z)$ — в ряд (3). Лемма доказана.

Введем обозначения: $\gamma = \max\{1, \delta\}$, $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$,

$$M(k) = \sup|D_x^k f(x)| \text{ по } x \in D(x_0, 2\delta),\quad \binom{m}{j} = m!/j!\,(m-j)!,$$

$$N(p) = \sum_{s_1=0}^{s_0} \binom{s_0}{s_1} \cdots \sum_{s_{n-1}=0}^{s_{n-2}} \binom{s_{n-2}}{s_{n-1}} M(p - s_1, s_1 - s_2, \ldots, s_{n-1} - s_n), \tag{4}$$

где $s_0 = p$, $s_n = 0$,

$$S(r) = \max_{1 \leqslant p \leqslant r} (r^p / N(p)). \tag{5}$$

Лемма 2. *Коэффициенты a_ν, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, ряда (3) для каждого фиксированного j, $1 \leqslant j \leqslant n$, всех индексов $\nu_j \geqslant 2\gamma$ и всех индексов $\nu_i \geqslant 0$ для $i \neq j$ удовлетворяют неравенствам*

$$|a_\nu| \leqslant 2^{-1} / S(\nu_j / 2\gamma). \tag{6}$$

Доказательство. Для функции $g(t) = f[v^{-1}(t)]$ имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)^p g(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^p f(x) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \sum_{s_i=0}^{s_{i-1}} \binom{s_{i-1}}{s_i} d_i^{s_{i-1}-s_{i-1}}\right) d_n^{s_{n-1}} f(x),$$

где $d_i = \delta u_{j,i} (\partial/\partial x_i)$, $s_0 = p$. Так как $|u_{j,i}| \leqslant 1$, то $|(\partial/\partial t_j)^p g(t)| \leqslant \delta^p N(p)$, где числа $N(p)$ определены формулами (4). Пользуясь этими оценками и повторяя рассуждения работы [2, с. 297—298], приходим к неравенствам (6). Лемма доказана.

Обозначим через $R_\nu(x)$ произведение многочленов Чебышева, которое входит в член ряда (3) с коэффициентом $\lambda_\nu a_\nu$, и найдем оценки для частных производных $R_\nu(x)$.

Лемма 3. *В кубе $D(x_0, 2\delta)$ имеют место неравенства*

$$|D_x^k R_\nu(x)| \leqslant m^{2k} (C/\delta)^k / k_1!\, k_2! \ldots k_n!, \tag{7}$$

где $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $m = \max\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$ и $C = 3 \cdot 2^n$.

Доказательство. Вычисляя производные произведения, получаем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^q R_\nu(x) = \sum_{s_1=0}^{s_0} \binom{s_0}{s_1} \cdots \sum_{s_{n-1}=0}^{s_{n-2}} \binom{s_{n-2}}{s_{n-1}} \prod_{i=1}^{n} h_{i,j}^{s_{i-1}-s_i} T_{\nu_i}^{(s_{i-1}-s_i)}(v_i(x)),$$

где $s_0 = q$, $s_n = 0$, $h_{i,j} = u_{i,j}/\delta$. Применяя эту формулу к функции $R_\nu(x)$ при $q = k_n$ и $j = n$, затем при $q = k_{n-1}$ и $j = n-1$ и т. д., приходим к выражению

$$D_x^k R_\nu(x) = \sum_{s_{1,1}=0}^{s_{0,1}} \binom{s_{0,1}}{s_{1,1}} \cdots \sum_{s_{n-1,1}=0}^{s_{n-2,1}} \binom{s_{n-2,1}}{s_{n-1,1}} \cdots$$

$$\cdots \sum_{s_{1,n}=0}^{s_{0,n}} \binom{s_{0,n}}{s_{1,n}} \cdots \sum_{s_{n-1,n}=0}^{s_{n-2,n}} \binom{s_{n-2,n}}{s_{n-1,n}} H(s_{r,q};\ x), \tag{8}$$

где $s_{0,j} = k_j$ и $s_{n,j} = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$, $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$,

$$H(s_{r,q};\ x) = \prod_{i=1}^{n} T_{\nu_i}^{(r_i)}(v_i(x)) \prod_{j=1}^{n} h_{i,j}^{s_{i-1,j}-s_{i,j}};\quad r_i = \sum_{j=1}^{n} (s_{i-1,j} - s_{i,j}).$$

Пользуясь оценками для производных многочленов Чебышева [2, с. 300], получаем, что $|H(s_{r,q};\ x)| \leqslant m^{2k}(2/\delta)^k / r_1!\ r_2! \dots r_n!$, где $m = \max\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}$. Поскольку

$$\prod_{i=1}^{n} r_i! \geqslant \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}(s_{i-1,j} - s_{i,j})! > \prod_{j=1}^{n} k_j!/2^{k_j + s_{1,j} + \dots + s_{n-2,j}},$$

то функция (8) удовлетворяет неравенствам

$$|D_x^k R_\nu(x)| \leqslant m^{2k}(4/\delta)^k \prod_{j=1}^{n} h(k_j)/k_1! k_2! \dots k_n!,$$

где $h(q) = \sum\limits_{s_1=0}^{s_0}\binom{s_0}{s_1} \dots \sum\limits_{s_{n-1}=0}^{s_{n-2}}\binom{s_{n-2}}{s_{n-1}} 2^{s_1+s_2+\dots+s_{n-2}} < (3\cdot 2^{n-2})^q$, $(s_0 = q)$. Отсюда уже следуют неравенства (7). Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы. Пользуемся функциями $T(r)$, $T_1(r)$, $T_2(r)$ и последовательностями чисел t_q, $q = 0, 1, 2, \dots$ и $M_j(p) = \sup\limits_{r \geqslant 1}(r^p / T_i(r))$, $i = 1, 2$, $p = 0, 1, 2, \dots$, построенными в работе [2, с. 295—296]. Известно, что $S(r) > r^{2n}T(r^{2n})/\alpha r_0^{2n}$, где α и r_0 — константы, а функция $S(r)$ определена формулой (5), и $T_1(r) \leqslant T(r)$ для $r \in \sigma_1$, $T_2(r) \leqslant T(r)$ для $r \in \sigma_2$, где σ_1 — множество всех отрезков $[t_{2q}, t_{2q+1})$, $q = 0, 1, 2, \dots$, а σ_2 — множество всех отрезков $[t_{2q+1}, t_{2q+2})$, $q = 0, 1, 2, \dots$. Пусть γ — число из леммы 2, δ_1 — множество всех отрезков $[2\gamma t_{2q}^{1/2n}, 2\gamma t_{2q+1}^{1/2n})$, $q = 0, 1, 2, \dots$ и δ_2 — множество всех отрезков $[2\gamma t_{2q+1}^{1/2n}, 2\gamma t_{2q+2}^{1/2n})$, $q = 0, 1, 2, \dots$. Среди индексов $\nu_i \in \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ всегда имеется хотя бы один максимальный индекс. Определяем числа $a_{\nu,1}$ и $a_{\nu,2}$ через коэффициенты a_ν ряда (3) следующим образом: $a_{\nu,1} = a_\nu$, если хотя бы один максимальный индекс $\nu_i \in \nu$ принадлежит множеству δ_1, и $a_{\nu,1} = 0$, если это условие не выполняется; $a_{\nu,2} = a_\nu$, если ни один максимальный индекс $\nu_i \in \nu$ не принадлежит δ_1, и $a_{\nu,2} = 0$ в ином случае. Согласно формуле (3), бесконечно дифференцируемая в замкнутом кубе $D(x_0, 2\delta)$ функция $f(x)$ является суммой двух функций

$$f_j(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu a_{\nu,j} \prod_{i=1}^{n} T_{\nu_i}(v_i(x)), \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

Покажем, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежат элементарным квазианалитическим классам. Положим $a = 2\gamma r_0$ и представим ряды (9) в виде суммы 2^n слагаемых

$$f_j(x) = f_{j,0}(x) + \sum_{p=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n} f_j(A_p,\ x), \tag{10}$$

где $A_p = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, функции $f_{j,0}(x)$ — суммы тех членов рядов (9), у которых все индексы $\nu_i \in \nu$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \nu_i \leqslant a - 1$, а функции $f_j(A_p, x)$ — суммы тех членов рядов (9), у которых индексы $\nu_i \in \nu$ удовлетворяют неравенствам: $\nu_i \geqslant a$ для $i \in A_p$ и $0 \leqslant \nu_i \leqslant a - 1$ для $i \overline{\in} A_p$. Функции $f_{j,0}(x)$ — многочлены по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, поэтому существует константа C_1 такая, что $|D_x^k f_{j,0}(x)| \leqslant C_1$ для всех $x \in D(x_0, 2\delta)$ и всех $k \geqslant 0$, $j = 1, 2$.

Найдем оценки для частных производных функций $f_1(A_p, x)$. В каждом коэффициенте $a_{\nu,1}$ ряда $f_1(A_p, x)$ есть максимальный индекс $m = \nu_j \in \nu$, который принадлежит δ_1, а его номер $j \in A_p$, поэтому $m \geqslant a$ и число $(m/2\gamma)^{2n} \in \sigma_1$. Пользуясь неравенством (6), неравенствами между функциями $S(r)$, $T(r)$, $T_1(r)$ и определением последовательности $M_1(p)$, $p = 0, 1, 2, \dots$, получаем, что

$$|a_{\nu,1}|\leqslant|a_\nu|\leqslant 2^{n-1}/S\,(m/2\gamma)\leqslant \alpha a^{2n}2^{n-1}/m^{2n}T_1\left((m/2\gamma)^{2n}\right)=$$

$$=C_k\prod_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{m}{2\gamma}\right)^{2nk_i}\Big/T_1\left(\left(\frac{m}{2\gamma}\right)^{2n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant C_k\prod_{i=1}^{n}(M_1(k_i))^{\frac{1}{n}},$$

где $C_k=\alpha a^{2n}2^{n-1}(2\gamma)^{2k}/m^{2k+2n}$. Так как $m\geqslant a$ и $m\geqslant\nu_j$ для $j\in A_p$, то $m^{2n}\geqslant\nu_{i_1}^2\nu_{i_2}^2\ldots\nu_{i_p}^2a^{2n-2p}$ и

$$|a_{\nu,1}|\leqslant C_{p,k}\prod_{i=1}^{n}(M_1(k_i))^{\frac{1}{n}}/m^{2k}\nu_{i_1}^2\nu_{i_2}^2\ldots\nu_{i_p}^2, \tag{11}$$

где $C_{p,k}=\alpha a^{2p}2^{n-1}(2\gamma)^{2k}$. Из неравенств (7) и (11) вытекает, что частные производные членов ряда $f_1(A_p,x)$ оцениваются сверху константами, которые не зависят от индексов $\nu_i\in\nu$ с номерами $i\overline{\in}A_p$, а эти индексы $\nu_i<a$. Поэтому в оценках вместо сумм по тем ν_i, у которых $i\overline{\in}A_p$, появляется множитель a^{n-p}. Имеем

$$|D_x^kf_1(A_p,x)|\leqslant N_k\prod_{i=1}^{n}(M_1(k_i))^{\frac{1}{n}}\prod_{s=1}^{p}\sum_{\nu_s=a}^{\infty}\frac{1}{\nu_s^2},$$

где $s\in A_p$, $N_k=\alpha 2^{n-1}a^{2n}C^k(2\gamma)^{2k}/\delta^k$ и оценки не зависят от p, $p\leqslant n$. Из этих оценок и оценок частных производных функции $f_{1,0}(x)$ следует, что существует константа C_δ такая, что

$$|D_x^kf_1(x)|\leqslant C_\delta^k(M_1(k_1)\,M_1(k_2)\ldots M_1(k_n))^{\frac{1}{n}}. \tag{12}$$

В оценках частных производных функции $f_2(x)$ учитываем, что максимальный индекс $m=\nu_j\in\nu$ коэффициента $a_{\nu,2}$ принадлежит множеству δ_2, а его номер $j\in A_p$, и получаем

$$|D_x^kf_2(x)|\leqslant C_\delta^k(M_2(k_1)\,M_2(k_2)\ldots M_2(k_n))^{\frac{1}{n}}. \tag{13}$$

Из неравенств (12) и (13) вытекает, что $f_1(x)\in C_n\{M_1^{\frac{1}{n}}(q)\}$ и $f_2(x)\in$ $\in C_n\{M_2^{\frac{1}{n}}(q)\}$. Так как последовательности $M_1(q)$ и $M_2(q)$ логарифмически выпуклы и удовлетворяют условиям (2), (см. [2, с. 296]), то $C_n\{M_1^{\frac{1}{n}}(q)\}$ и $C_n\{M_2^{\frac{1}{n}}(q)\}$ — элементарные квазианалитические классы функций. Теорема доказана.

1. *Mandelbrojt S.* Sur les fonctions inde'finiment de'rivables.— Acta Math., 1940.— 72 p.
2. *Хрыптун В. Г.* Представление бесконечно дифференцируемой функции в виде суммы функций, принадлежащих квазианалитическим классам.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 3, с. 295—302.

Пединститут,
Ивано-Франковск

Поступила в редакцию
9,03.81