

Об асимптотике решения задачи Дирихле для дифференциального оператора с малым параметром

Рассмотрим задачу Дирихле

$$L^\varepsilon U^\varepsilon(x) = (\varepsilon L_1 + L_0) U^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in D \subset R^r, \quad U(x)|_{\partial D} = \psi(x). \quad (1)$$

Здесь

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_1^r a^{ij}(x) \partial^2 / \partial x^i \partial x^j, \quad L_0 = \frac{1}{2} \sum_1^r A^{ij}(x) d^2 / \partial x^i \partial x^j + \sum_1^r B^i(x) \partial / \partial x^i,$$

D — ограниченная область в R^r с достаточно гладкой границей ∂D . Коэффициенты предполагаются достаточно гладкими; например, заведомо достаточно считать их дважды непрерывно дифференцируемыми. Оператор L_1 предполагается строго эллиптическим. Оператор L_0 , напротив, может вырождаться, и именно этот случай представляет интерес. В частности, оператор L_0 может вырождаться в оператор первого порядка.

В случае, когда L_0 — оператор первого порядка, предельное поведение решения задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ изучалось многими авторами (см. [1, 2]). Оказывается, что в этом случае предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ существенно зависит от поведения траекторий характеристической системы

$$\dot{x} = B(x), \quad x \in R^r, \quad B(x) = (B^1(x), \dots, B^r(x)). \quad (2)$$

Большое разнообразие поведения характеристик, особенно в больших размерностях, не позволяет полностью описать все возможные случаи. Здесь приходится ограничиваться рассмотрением «крайних случаев». Общий случай является комбинацией этих «крайних случаев» и некоторых вырожденных ситуаций. При этом рассмотрение каждого отдельного «крайнего случая» требует преодоления серьезных трудностей.

При исследовании поведения решения задачи (1) роль характеристик оператора L_0 играют траектории диффузионного процесса, управляемого оператором L_0 [3].

Предельное поведение $U^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяется предельным поведением траекторий диффузионного процесса X_t^ε , управляемого оператором L^ε . Траектории процесса X_t^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ выходят из ограниченной области D с вероятностью 1; однако если траектории диффузионного процесса, управляемого оператором L^ε , не выходят из области D с вероятностью 1, момент выхода $\tau^\varepsilon = \inf\{t: X_t^\varepsilon \notin D\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ с положительной вероятностью стремится к бесконечности. Можно сказать, что различные типы поведения $U^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствуют различным скоростям стремления τ^ε к бесконечности, и чем больше эта скорость, тем сложнее задача.

В настоящей работе рассмотрена ситуация, когда быстрая составляющая движения (т. е. отвечающая оператору L_0) препятствует выходу траектории X_t^ε из области D . За счет возмущений при $\varepsilon \rightarrow 0$ процесс X_t^ε выйдет из области с вероятностью 1, но этот выход произойдет за весьма большое при $\varepsilon \rightarrow 0$ время (например, порядка $\exp\{\text{const}/\sqrt{\varepsilon}\}$). За такие времена траектории X_t^ε и X_t^0 успеют далеко разойтись и выход из области D будет определяться большими отклонениями траекторий X_t^ε от X_t^0 . Предельная функция зависит от возмущений и будет в этом случае постоянной или кусочно постоянной.

Если L_0 — оператор первого порядка и его характеристики пересекают границу ∂D области D по направлению снаружи внутрь, то выход процесса X_t^ε из области D может произойти только за счет больших отклонений от предельной динамической системы. Наличие в L_0 членов со вторыми

производными в некотором смысле «облегчает» выход траекторий процесса X_t^ε из области D ; однако если вырождение L_0 достаточно сильное, то выход на ∂D все равно происходит за счет больших уклонений X_t^ε от процесса X_t^0 . В этих случаях время выхода процесса X_t^ε из области D очень быстро растет с уменьшением ε .

Рассмотрим функционал $S_{0T}(\varphi)$ на пространстве $C_{0T}(R^r)$ непрерывных функций $\varphi_s, s \in [0, T]$, со значениями в R^r . Положим для абсолютно непрерывных функций $\varphi \in C_{0T}(R^r)$

$$S_{0T}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_1^r a_{ij}(\varphi_s) (\dot{\varphi}_s^i - B^i(\varphi_s)) (\dot{\varphi}_s^j - B^j(\varphi_s)) ds,$$

где $(a_{ij}(x))$ — матрица, обратная к матрице $(a^{ij}(x))$ коэффициентов при вторых производных в L_1 . Для неабсолютно непрерывных $\varphi \in C_{0T}(R^r)$ полагаем $S_{0T}(\varphi) = +\infty$.

Связное открытое множество G назовем перемешивающим для процесса X_t^0 , если для любых точек $x, y \in G$ и любого $\delta > 0$ найдется $T \geq 0$ такое, что $P_x\{|X_T^0 - y| < \delta\} > 0$.

Легко дать различные достаточные условия для того, чтобы множество G было перемешивающим. Например, достаточно, чтобы в G оператор L_0 не вырождался, но нетрудно убедиться, что это свойство выполняется и при довольно сильных вырождениях оператора L_0 .

Теорема 1. Пусть в области D с гладкой границей ∂D выделены область Π , гомеоморфная кольцу, Γ — внешняя граница этой области, которую мы считаем гладкой, и область G . Предположим: 1) $\rho(G, \Pi) > 0$, $\rho(\Pi, \partial D) > 0$, $\rho(G, \partial D) > 0$; 2) траектории динамической системы (2) пересекают ∂D и Γ под ненулевым углом по направлению снаружи внутрь и эта динамическая система не имеет точек своего ω -предельного множества вне объединения областей G и G_1 , ограниченного кривой Γ ; 3) Π и G — перемешивающие области и вне $G_1 \cup G$ все коэффициенты в операторе L_0 при вторых производных равны 0; 4) все функции φ_s , на которых достигается

$$\min \left(\inf_{\substack{\varphi: \Gamma \rightarrow \partial D \\ T > 0}} S_{0T}(\varphi), \inf_{\substack{\varphi \in \Gamma \rightarrow \partial D \\ T > 0}} S_{0T}(\varphi) + \inf_{\substack{\varphi: \partial G \rightarrow \partial D \\ T > 0}} S_{0T}(\varphi) \right) = V_0, \quad (3)$$

оканчиваются на ∂D в одной и той же точке x_0 . Тогда $\lim U^\varepsilon(x) = \psi(x_0)$.

Доказательство. Пусть Γ^δ — граница δ -окрестности кривой Γ , δ — малое положительное число. Положим $\sigma_0^\varepsilon = \inf\{t: X_t^\varepsilon \in \Gamma \cup \partial D\}$, $\kappa_1^\varepsilon = \inf\{t > \sigma_0^\varepsilon: X_t^\varepsilon \in \Gamma^\delta\}$, ..., $\sigma_{n-1}^\varepsilon = \inf\{t: X_t^\varepsilon \in \partial D, t > \kappa_{n-1}^\varepsilon\}$, $\kappa_n^\varepsilon = \inf\{t > \sigma_{n-1}^\varepsilon: X_t^\varepsilon \in \Gamma^\delta\}$... Последовательность $Z_n^\varepsilon = X_{\sigma_n^\varepsilon}^\varepsilon$ образует марковскую цепь с фазовым пространством $\Gamma \cup \partial D$. Конечно, с подавляющей вероятностью при малых ε переходы в этой цепи происходят на Γ , исходя из любого начального состояния $x \in \Gamma \cup \partial D$; тем не менее при $\varepsilon \rightarrow 0$ цепь Z_n^ε рано или поздно попадет на ∂D . Покажем, что при любом $\mu > 0$ первый выход на ∂D произойдет в μ -окрестности точки x_0 .

Из силу предположения о единственности точки x_0

$$\min \left(\inf_{\substack{\Gamma \rightarrow \partial D \\ T > 0}} \int_{U_\mu(x_0)} S_{0T}(\varphi), \inf_{\substack{\varphi: \Gamma \rightarrow \partial D \\ T > 0}} S_{0T}(\varphi) + \inf_{\substack{\varphi: \partial G \rightarrow \partial D \\ T > 0}} \int_{U_\mu(x_0)} S_{0T}(\varphi) \right) = V_\mu > V_0.$$

Обозначим $\lambda = (V_\mu - V_0)/2$. Покажем, что

$$\inf_{x \in \Gamma} P_x(Z_1 \in U_{\delta/2}(x_0) \cap \partial D) > \exp\{- (V_0 + \lambda/2)/\varepsilon\}. \quad (4)$$

Действительно, если минимум в (4) достигается на первой величине, то это утверждение следует из оценок, имеющихся для случая оператора первого порядка L_0 .

Если $V_0 = \inf_{\substack{\varphi: \Gamma \rightarrow \partial D \\ T > 0}} S_{0T}(\varphi) + \inf_{\substack{\varphi: \partial G \rightarrow \partial D \\ T > 0}} S_{0T}(\varphi)$, то пусть $\varphi_s^1, s \in [0, T_1]$, и $\varphi_s^2, s \in$

$\in [0, T_2]$, таковы, что $S_{0T_1}(\varphi^{(1)}) + S_{0T_2}(\varphi^{(2)}) < V_0 + \lambda/4$, $\varphi_0^1 \in \Gamma$, $\varphi_{T_1}^1 \in \partial G$, $\varphi_0^{(2)} \in \partial G$, $\varphi_{T_2}^{(2)} \in \partial D \cap U_{\delta/4}(x_0)$. Используя оценки с функционалом действия [4], получим:

$$P_{\varphi_0^1} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T_1} |X_s^e - \varphi_s^{(1)}| < \delta/4 \right\} > \exp \left\{ -[S_{0T_1}(\varphi^{(1)}) + \lambda/10]/\varepsilon \right\},$$

$$P_{\varphi_0^{(2)}} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T_2} |X_s^e - \varphi_s^{(2)}| < \delta/4 \right\} > \exp \left\{ -[S_{0T_2}(\varphi^{(2)}) + \lambda/10]/\varepsilon \right\}. \quad (5)$$

Так как области Π и G перемешивающие, то $\forall x \in \Pi$ при некоторых θ_1 и θ_2 $P_x \{X_{\theta_1}^0 \in U_{\delta/8}(\varphi_0^{(1)})\} > \alpha_1 > 0$, $P_{\varphi_{T_1}^1} \{X_{\theta_2}^0 \in U_{\delta/8}(\varphi_0^{(2)})\} > \alpha_1 > 0$. Из стандартных оценок (см., напр., [3]) следует, что $\forall T > 0$ и $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$ $P_{\varphi_0^1} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^e - X_t^0| > \delta/8 \right\} < \alpha_1/2$. Используя это соотношение, из последних неравенств заключаем, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$P_x \{X_{\theta_1}^e \in U_{\delta/4}(\varphi_0^{(1)})\} > \alpha_1/2, \quad P_{\varphi_{T_1}^1} \{X_{\theta_2}^e \in U_{\delta/4}(\varphi_0^{(2)})\} > \alpha_1/2. \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) вытекает (4), если принять во внимание строгую марковость процесса X_t^e . Далее, используя оценки сверху для вероятностей больших отклонений (см. [4, 5]), нетрудно показать, что

$$\sup_{x \in \Pi} P_x \{Z_1 \in \partial D \setminus U_{\delta/4}(x_0)\} < \exp \left\{ -(V_0 + \lambda)/\varepsilon \right\}. \quad (7)$$

Для этого можно, например, отдельно оценить сверху вероятность перехода с Γ на ∂D вдоль траекторий, не задевающих область G (это делается в точности так же, как для оператора L_0 первого порядка) и вероятность траекторий, ведущих с Γ на ∂D с заходом в G . Последняя вероятность оценивается сверху произведением

$$\sup_{x \in \Gamma} P_x \{\tau_G^e < \sigma_1^e\} \sup_{x \in \partial D} P_x \{X_{\sigma_0}^e \in \partial D \setminus U_{\delta/2}(x_0)\}, \quad (8)$$

где $\tau_G^e = \inf \{t : X_t^e \in \partial G\}$. Каждый сомножитель в (8) оценивается сверху с помощью функционала действия стандартным образом, так что в результате получается оценка (7). Из оценок (4) и (7) утверждение теоремы 1 выводится совершенно так же, как для оператора L_0 первого порядка. Следует только еще иметь в виду, что траектории процесса X_t^e выходят из области G_1 , ограниченной кривой Γ , обязательно пересекая в некоторый момент Γ , поэтому структура оператора L_0 внутри области $G_1 \setminus \Pi$ не влияет на $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U^\varepsilon(x)$. Таким образом, наличие перемешивающих областей приводит к «облегчению» достижения диффундирующей частицей границы области. Фактически это происходит за счет того, что в операторе L_0 имеются члены,

облегчающие движение против динамической системы $\dot{x} = B(x)$. Наличие членов со вторыми производными в операторе L_0 может облегчить движение против указанной динамической системы и в том случае, когда в области D нет перемешивающих множеств. Пусть оператор L^ε в полярных координатах имеет вид

$$L^\varepsilon = \frac{1}{2} A(r, \varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B^1(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} + B^2(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\varepsilon}{2} \left(a^{22}(r, \varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a^{11}(r, \varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2a^{12}(r, \varphi) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \right) = L_0 + \varepsilon L_1, \quad A(r, \varphi) > 0, \quad (9)$$

$$\det(a^{ij}(r, \varphi)) > 0.$$

Рассмотрим уравнение $L^\varepsilon U^\varepsilon = 0$ в области D , гомеоморфной кольцу. Предположим, что траектории динамической системы входят в область D и притягиваются к предельному циклу Γ . Пусть $\partial_1 D$ — внешняя, а $\partial_2 D$ — внутренняя часть границы ∂D области D . Обозначим M_1 ближайшую к началу отсчета 0 точку $\partial_1 D$, M_2 — наиболее удаленную от 0 точку $\partial_2 D$; $|OM_1| = r_1$, $|OM_2| = r_2$. Пусть N_2 — ближайшая к 0, а N_1 — наиболее удаленная от 0 точка цикла Γ ; $|ON_1| = \rho_1$, $|ON_2| = \rho_2$. Предполагаем, что $r_1 > \rho_1 > \rho_2 >$

$> r_2$. Чтобы исследовать поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $U^\varepsilon(x)$, являющейся решением задачи $L^\varepsilon U^\varepsilon(x) = 0$, $x \in D$, $U^\varepsilon(x)|_{\partial D} = \psi(x)$, рассмотрим функционал $R_{0T}(\mu)$, определенный для непрерывных функций $\mu_t(r_t, \varphi_t)$, $t \in [0, T]$, со значениями в R^r ; (r, φ) — полярные координаты точки $\mu \in R^r$. Для функций μ_t с абсолютно непрерывной компонентой φ_t положим $R_{0T}(\mu_s) =$

$$= R_{0T}(r_s, \varphi_s) = \frac{1}{2} \int_0^T a_{11}(r_s, \varphi_s) [r_s - B^1(r_s, \varphi_s)]^2 ds, \text{ где } (a_{ij}(x)) = (a^{ij}(x))^{-1};$$

для остальных μ_s считаем $R_{0T}(\mu) = +\infty$. Далее положим для функций $r_s, \varphi_s \in [0, T]$, $\tilde{S}_{0T}(r) = \inf_{\varphi_s \in C_{0T}(R^1)} R_{0T}(r, \varphi)$. Наконец, обозначим $S_{0T}(r)$ полу-

непрерывный снизу вариант функционала $\tilde{S}_{0T}(r)$: $S_{0T}(r) = \lim_{\rho_{0T}(\tilde{r}, r) \rightarrow 0} \tilde{S}_{0T}(\tilde{r})$.

Функционал $S_{0T}(r)$ является функционалом действия для семейства процессов r_t^ε (первой компоненты процесса $X_t^\varepsilon(r_t^\varepsilon, \varphi_t^\varepsilon)$) при $\varepsilon \downarrow 0$. Это значит, что для всякой непрерывной функции $\rho_s: [0, T] \rightarrow R^1$, $\min_{0 \leq s \leq T} \rho_s > \kappa > 0$, и $\forall h, \delta > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$P_{r_0} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |r_s^\varepsilon - \rho_s| < \delta \right\} > \exp \left\{ - [S_{0T}(\rho) + h]/\varepsilon \right\}, P_{r_0} \left\{ \rho(r^\varepsilon, \Phi_{0T}(s)) > \delta \right\} \leq \exp \left\{ -(s-h)/\varepsilon \right\}, \quad (10)$$

где $\Phi_{0T}(s) = \{\rho \in C_{0T}(R^1) : S_{0T}(\rho) \leq s\}$.

Положим $V_1 = \inf \{S_{0T}(g) : g \in C_{0T}(R^1), g_0 = \rho_1, g_T = r_1, T > 0\}$, $V_2 = \inf \{S_{0T}(g) : g \in C_{0T}(R^1), g_0 = \rho_2, g_T = r_2, T > 0\}$.

Теорема 2. Пусть оператор L^ε задается формулой (9) и выполнены перечисленные выше условия. Предположим, что $V_1 < V_2$. Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U^\varepsilon(x) = \psi(M_1)$ при $x = (r, \varphi) \in \{r_2 < r \leq r_1\} = \bar{\Pi}$. При $x \in D \setminus \bar{\Pi}$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U^\varepsilon(x) = U^0(x)$ существует и функция $U^0(x)$ — единственное решение задачи $L_0 U^0(x) = 0$, $x \in D \setminus \bar{\Pi}$, $U^0(x)|_{\partial D} = \psi(x)$.

Доказательство. Кольцо $\Pi = \{(r, \varphi) : \rho_2 < r < \rho_1\}$ является перемешивающей областью. Из любой точки этого кольца можно попасть в окрестность любой другой за счет движения по предельному циклу и диффузии по углу. Как и в случае теоремы 1, можно ввести марковскую цепь с фазовым пространством $\partial_1 D \cup \partial_2 D \cup \{(r, \varphi) : r = \rho_1\} \cup \{(r, \varphi) : r = \rho_2\}$. Переходы в состояния, принадлежащие $\partial D = \partial_1 D \cup \partial_2 D$, при малых ε маловероятны. Если $V_1 < V_2$, то из оценок (10) стандартным образом выводится, что вероятность достижения окружности $r = r_2$ из точек кольца Π бесконечно мала при $\varepsilon \rightarrow 0$ по сравнению с вероятностью достижения окружности $r = r_1 + \delta$, если δ достаточно мало. Отсюда немедленно выводится, что с подавляющей при малых ε вероятностью $X_{\tau_\varepsilon}^\varepsilon \in U_{2\delta}(M_1) \cap \partial_1 D$. Из этого утверждения, с учетом непрерывности граничной функции, вытекает, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U^\varepsilon(x) = \psi(M_1)$ при $x \in \bar{\Pi}$. Если $x \in D \setminus \bar{\Pi}$, то утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 работы [5].

1. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta U + A(x, y) U_x + B(x, y) U_y + C(x, y) U = D(x, y)$ for small ε . — Ann. Math. Ser. 2, 1950, p. 428—445.
2. Хасьяминский Р. З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией. — Теор. вероятн. и ее применение, 1963, 8, № 1, с. 3—25.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965. — 655 с.
4. Сарафян В. В. Об асимптотике первого собственного значения эллиптического оператора с малым параметром. — Докл. АН АрмССР, 1982, 25, № 3, с. 79—83.
5. Сафарян Р. Г. Некоторые краевые задачи с малым параметром для вырождающихся диффузионных процессов и соответствующих дифференциальных уравнений. — Изв. АН АрмССР. Математика, 1980, 15, № 4, с. 258—267.