УДК 511.7

В. А. Бородин

Замечание к теореме Скотта и Уолла

В работе рассматриваются вопросы сходимости непрерывных дробей с частными знаменателями равными единице

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{1 + \ldots}}}. \tag{1}$$

Специальная форма непрерывной дроби не является существенным ограничением, поскольку любая непрерывная дробь эквивалентными преобразованиями может быть приведена к виду (1).

Подходящими дробями непрерывной дроби (1) называются дроби

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{1}{1 + a_2}; \qquad \frac{A_3}{B_3} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + a_3}} = \frac{1 + a_3}{1 + a_2 + a_3}; \ldots$$

$$\frac{A_n}{B_n} \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \ddots + \cfrac{1}{1 + a_n}}}. \tag{2}$$

Говорят, что непрерывная дробь (1) сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = G. \tag{3}$$

Ван Влек и Принсгейм [2] доказали, что, если все частные числители a_n непрерывной дроби (1) лежат в достаточно малой окрестности произвольной точки a, $a \notin (-\infty; -1/4)$, то непрерывная дробь (1) сходится.

В работе [2] установлена важная «параболическая» теорема:

Если все частные числители a_n непрерывной дроби (1) лежат в ограниченной параболической области комплексной плоскости z

$$a_n = \left\{ z : |z| - \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}, \ |z| \leqslant M < \infty \right\}, \quad M \text{ — любое}, \tag{4}$$

тогда непрерывная дробь (1) сходится. Через $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ обозначены действительная и мнимая части числа z.

В работе [1] рассмотрен случай, когда частичные числители лежат в меньшей параболической области, но $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Доказательство «параболической» теоремы Скотта и Уолла основывается на сопоставлении непрерывной дроби некоторого числового ряда, получении фундаментальных неравенств, которые обеспечивают сходимость ряда. Проектирование фундаментальных неравенств на прямую $\operatorname{Im} z = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{Re} z$ позволяет «повернуть» параболическую область сходимости.

Теорема: *Если для любого* φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, *все частные числители* a_n *непрерывной дроби*

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{1 + \ldots}}} \tag{4}$$

лежат в параболической области

$$\{z : |z| \leqslant \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) + t\}, \quad 2t < \cos\varphi, \tag{5}$$

и, кроме того,

$$|a_n| \leqslant M + \alpha n, \qquad \alpha < \cos\varphi - 2t, \tag{6}$$

то непрерывная дробь сходится.

Следствие. *Если все частные числители* a_n *лежат на луче*

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{Re} z, \qquad \operatorname{Re} z > 0, \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } |a_n| \leqslant M < \infty,$$

то непрерывная дробь (4) *сходится.*

1. *Baker G. A. Jr.* Essential of Padé approximants.— New York : Acad. press, 1975.— 301 p.
2. *Scott W. T., Wall H. S.* A convergence theorem for continued fractions.— Trans. Amer. Math. Soc., 1940, **47**, p. 155—172.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Поступила 01.06.84