

Д. Г. Корневский

Алгебраические коэффициентные условия абсолютной (не зависящей от запаздывания) асимптотической устойчивости с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических уравнений Ито с последствием

В настоящей статье получены алгебраические условия асимптотической устойчивости с вероятностью 1 решений систем стохастических линейных дифференциальных уравнений Ито с постоянным запаздыванием аргумента, не зависящие от величины запаздывания τ . Условия выражены в терминах некоторых матричных неравенств для матриц входящих в систему уравнений.

Использован метод квадратичных стохастических функционалов Ляпунова—Красовского, матрица квадратичных форм которых согласована с матрицей невозмущенной системы. Рассмотрен случай скалярного винеровского процесса.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим основную начальную задачу для векторно-матричных стохастических дифференциальных уравнений Ито с последствием следующего вида

$$dx^\varepsilon(t) = [Ax^\varepsilon(t) + A_1x^\varepsilon(t - \tau)] dt + [B(\varepsilon)x^\varepsilon(t) + B_1(\varepsilon)x^\varepsilon(t - \tau)] dw(t),$$

$$x^\varepsilon(t_0 - \theta) = \text{const} = x_0 \neq 0, \quad t_0 - \tau \leq \theta \leq 0, \quad (1)$$

где A, A_1, B, B_1 — постоянные матрицы; $\tau = \text{const} > 0$ — запаздывание аргумента t ; ε — параметр; $B(0) = B_1(0) = 0$; $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс.

Введем, отталкиваясь от определения абсолютной устойчивости (асимптотической устойчивости при любом $\tau = \text{const} > 0$) решений детерминированных систем с запаздыванием, данного Л. Э. Эльсгольцем [1] (см. также [2], гл. 3, § 10), следующее аналогичное определение для стохастических систем с последствием (запаздыванием).

Определение 1. Тривиальное решение ($x^{(\varepsilon)} = 0$) системы с последствием (1) называется абсолютно устойчивым с вероятностью 1, если оно асимптотически устойчиво с вероятностью 1 при любом $0 < \tau = \text{const} < \infty$, т. е.

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x^\varepsilon(t)\| = 0 \mid x_0 \neq 0 \right\} = 1, \quad 0 < \tau = \text{const} < \infty.$$

Наряду с системой уравнений (1), называемой в дальнейшем «возмущенной», рассмотрим детерминированную (невозмущенную, $\varepsilon = 0$) систему

$$dx(t)/dt = Ax(t) + A_1x(t - \tau), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

В предположении, что невозмущенная система (2) абсолютно устойчива, ставится задача определения алгебраических коэффициентных условий абсолютной устойчивости с вероятностью 1 тривиального решения возмущенной системы (1). Насколько известно автору, в литературе таких условий нет.

При решении этой задачи используется метод квадратичных стохастических функционалов Ляпунова — Красовского (СФЛ — К), матрица квадратичных форм которых согласована с матрицей невозмущенной системы, т. е. с матрицей $A + A_1$. Заметим, что одной из первых работ по устойчивости с вероятностью 1 и по вероятности решений стохастических уравнений Ито с последствием, в которой используются СФЛ — К, можно назвать работу [3]. В дальнейшем СФЛ — К в задачах изучения вероятностной устойчивости решений стохастических уравнений Ито с последствием использовались во многих работах (см. обзор в [4]).

2. Результаты, полученные ранее для детерминированных уравнений, и некоторые используемые далее факты. 1'. По-видимому, одной из первых работ, где установлены алгебраические коэффициентные условия устойчивости при любом постоянном запаздывании аргумента, следует считать работу Б. С. Разумихина [5], в которой получены для уравнения первого порядка $dx(t)/dt + ax(t) + bx(t - \tau) = 0$ оценки a, b , обеспечивающие асимптотическую устойчивость независимо от τ . В дальнейшем поиск таких условий для различных классов детерминированных уравнений более высокого порядка был основной задачей многих работ (см. [4, 6]).

В наиболее общем виде алгебраические коэффициентные условия абсолютной устойчивости тривиального решения детерминированных систем уравнений с запаздывающим аргументом, выраженные в форме некоторых матричных неравенств для матриц A и A_1 , представлены в монографии Дж. Хейла [7, § 5.2, с. 134—135, с. 160—161].

Отметим, что сформулированная в [6] теорема 1 практически трудно проверяемая. Приведенное в ней для системы

$$dx(t)/dt = A_0x(t) + \sum_{n=1}^m A_nx(t - \Delta_n)$$

условие на спектр системы при $\Delta_n = 0$, состоящее в том, что

$$\bigcup_z \sigma \left(A_0 + \sum_{k=1}^m z_k A_k \right) \subset \{ \lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0 \}, \quad |z_k| = 1,$$

классифицируется как необходимое и достаточное для абсолютной устойчивости. В действительности оно является лишь необходимым; при $z_k = 1$ это следует из ранее известных результатов (см., например, [7, с. 160]).

2'. Из предположения, что решение $x = 0$ системы (2) абсолютно устойчиво, следуют два факта, используемые в дальнейшем.

1. Для системы (2) существует положительно определенный квадратичный функционал $V_0(x(t + \theta))$ вида

$$V_0(x(t + \theta)) = x^T(t) H_0 x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(\theta) H_0 x(\theta) d\theta, \quad (3)$$

постоянная матрица $H_0 > 0$ которого является решением матричного уравнения Ляпунова

$$(A + A_1)^T H_0 + H_0 (A + A_1) = -Q, \quad (4)$$

где Q — любая заданная симметричная положительно определенная матрица, в частном случае $Q = E$ (E — единичная матрица); τ — символ транспонирования.

Развивая упомянутые условия [7], можно показать с помощью функционала (3), что достаточными условиями абсолютной устойчивости (близкими к необходимым и достаточным и, по-видимому, неулучшаемыми) являются гурвицевость матрицы $A + A_1$ и отрицательная определенность следующей матрицы

$$\begin{bmatrix} A^T H_0 + H_0 A + H_0 & H_0 A_1 \\ A_1^T H_0 & -H_0 \end{bmatrix} (< 0). \quad (5)$$

Очевидно, что если стремиться для детерминированных систем (2) получить условия устойчивости, которые не зависят от τ , то нулевое решение уравнения, соответствующего уравнению (2) при $\tau \equiv 0$, должно быть асимптотически устойчивым. Т. е. необходимым условием абсолютной устойчивости нулевого решения системы (2) является гурвицевость матрицы $A + A_1$; это условие следует из непрерывной зависимости корней λ характеристического квазиполинома $\det(A + A_1 \exp(-\tau\lambda) - E\lambda)$ от запаздывания τ .

Примечание. Нетрудно обнаружить, знакомясь с литературой, не указанной в списке [4], что во всех исследованиях по устойчивости детерминированных линейных систем с постоянным запаздыванием с помощью функционалов Ляпунова — Красовского вида (3) получаемые условия устойчивости не зависели явно от величины τ , т. е. фактически эти условия были условиями абсолютной устойчивости. Поэтому библиографию по абсолютной устойчивости можно было бы значительно расширить. Вопрос о том, в какой форме взять функционал, чтобы в условия устойчивости явно входил параметр τ , обсуждается в [7, с. 137].

II. Алгебраические коэффициентные (близкие к необходимым и достаточным) условия асимптотической устойчивости с вероятностью единица стохастических систем вида (1) без последействия ($\tau \equiv 0$)

$$dx(t) = (A + A_1)x(t)dt + (B + B_1)x(t)d\omega(t) \quad (6)$$

и с устойчивой матрицей $A + A_1$ сводятся к следующему матричному соотношению (см. работу [8]):

$$(A + A_1)^T H_0 + H_0(A + A_1) + (B + B_1)^T H_0(B + B_1) < 0. \quad (7)$$

3. Основной результат. Итак, установим условия, налагаемые на матрицы A, A_1, H_0, B, B_1 , которые обеспечивают асимптотическую устойчивость с вероятностью 1 нулевого решения системы (1) при любом $\tau = \text{const} < \infty$.

В силу общих теорем об асимптотической устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений Ито с последействием их решения асимптотически устойчивы с вероятностью 1, если существует положительно определенный функционал Ляпунова — Красовского, математическое ожидание полной производной по времени которого вдоль решений отрицательно (см., например, [3]).

Учитывая, что согласно предположению исходная система (1) линейна и стационарна, а невозмущенная система (2) абсолютно устойчива по Ляпунову, можно выбрать для системы (1) в качестве функционала Ляпунова — Красовского положительно определенный квадратичный функционал $V(x^e(t + \theta))$ фазовых переменных x^e ,

$$V(x^e(t + \theta)) = (x^e(t))^T H_0 x^e(t) + \int_{t-\tau}^t (x^e(\theta))^T H_0 x^e(\theta) d\theta, \quad (8)$$

постоянная матрица $H_0 > 0$ которого определена из уравнения Ляпунова

(4), соответствующего невозмущенной системе (2) с устойчивой матрицей $A + A_1$.

Стохастический дифференциал dV функционала (8), вычисленный вдоль решений системы (1), имеет вид

$$\begin{aligned} dV(x^e)|_{(1)} = & d(x^e(t))^T H_0 x^e(t) + (x^e(t))^T H_0 dx^e(t) + [B(\varepsilon)x^e(t) + \\ & + B_1(\varepsilon)x^e(t - \tau)]^T H_0 [B(\varepsilon)x^e(t) + B_1(\varepsilon)x^e(t - \tau)] dt + (x^e(t))^T H_0 x^e(t) dt - \\ & - (x^e(t - \tau))^T H_0 x^e(t - \tau) dt = \{ [Ax^e(t) + A_1 x^e(t - \tau)]^T dt + [B(\varepsilon)x^e(t) + \\ & + B_1(\varepsilon)x^e(t - \tau)]^T dw(t) \} H_0 x^e(t) + (x^e(t))^T H_0 \{ [Ax^e(t) + A_1 x^e(t - \tau)] dt + \\ & + [B(\varepsilon)x^e(t) + B_1(\varepsilon)x^e(t - \tau)] dw(t) \} + [B(\varepsilon)x^e(t) + B_1(\varepsilon)x^e(t - \tau)]^T \times \\ & \times H_0 [B(\varepsilon)x^e(t) + B_1(\varepsilon)x^e(t - \tau)] dt + (x^e(t))^T H_0 x^e(t) dt - \\ & - (x^e(t - \tau))^T H_0 x^e(t - \tau) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Исходя из (9), находим математическое ожидание полной производной $\mathbf{M} \left\{ \frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} \right\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ \frac{dV(x^e)}{dt} \Big|_{(1)} \right\}_{x^e=x} = & [Ax(t) + A_1 x(t - \tau)]^T H_0 x(t) + (x(t))^T H_0 [Ax(t) + \\ & + A_1 x(t - \tau)] + x(t)^T H_0 x(t) - (x(t - \tau))^T H_0 x(t - \tau) + [B(\varepsilon)x(t) + \\ & + B_1(\varepsilon)x(t - \tau)]^T H_0 [B(\varepsilon)x(t) + B_1(\varepsilon)x(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Правую часть соотношения (10) можно рассматривать как квадратичную форму от $\dot{x}(t)$, $x(t - \tau)$. Тогда (10) переписывается в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ \frac{dV(x^e)}{dt} \Big|_{(1)} \right\}_{x^e=x} = & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}^T \times \\ & \times \begin{bmatrix} A^T H_0 + H_0 A + B^T H_0 B + H_0 & H_0 A_1 + B^T H_0 B_1 \\ A_1^T H_0 + B_1^T H_0 B & B_1^T H_0 B_1 - H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Математическое ожидание (11) отрицательно лишь в случае, когда матрица, входящая в правую часть, отрицательно определена, т. е. когда

$$\begin{bmatrix} A^T H_0 + H_0 A + B^T H_0 B + H_0 & H_0 A_1 + B^T H_0 B_1 \\ A_1^T H_0 + B_1^T H_0 B & B_1^T H_0 B_1 - H_0 \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Тривиальное решение ($x^e = 0$) системы стохастических уравнений Ито с запаздыванием (1) абсолютно устойчиво с вероятностью 1, если выполнены следующие условия: 1) матрица $A + A_1$ гурвицева; 2) имеет место матричное неравенство (12).

Нетрудно заметить, что если случайных возмущений нет, т. е. $B = B_1 = 0$, то из условия (12) следует условие (5) для детерминированных систем.

Полученные результаты легко обобщаются на системы стохастических уравнений Ито с векторным винеровским процессом.

1. Эльсгольц Л. Э. Сильная абсолютная устойчивость. — В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Изд-во ун-та Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1967, т. 4, с. 273.
2. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

3. *Kushner H. J.* On the stability of processes defined by stochastic difference — differential equations.— *J. Different. Equat.*, 1968, 4, N 3, p. 424—443.
4. *Корневский Д. Г.* К алгебраическим условиям абсолютной устойчивости с вероятностью единица решений систем линейных стохастических уравнений Ито с последствием.— В кн.: Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 78—89.
5. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием.— *Прикл. математика и механика*, 1956, 20, № 4, с. 500—512.
6. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов.— *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1983, № 12, с. 17—19.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
8. *Корневский Д. Г.* Коэффициентный алгебраический критерий асимптотической устойчивости с вероятностью единица решений линейных систем стохастических уравнений Ито.— В кн.: Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 67—77.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 25.09.84,
после доработки — 23.04.85