УДК 519.21

В. Н. Супрун, В. М. Шуренков

О моменте выхода полунепрерывного процесса с границей

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$,— однородный процесс с независимыми приращениями и положительными скачками, траектории которого непрерывны справа, а среднее значение равно нулю. Тогда

$$\mathbf{M}e^{-s[\xi(t)-\xi(0)]} = \exp[tk(s)],$$

где

$$k(s) = bs^2 + \int_0^\infty (e^{-sy} - 1 + sy)\,\Pi(dy),$$

$s \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, а мера Π на $(0, \infty)$ такова, что $\int_0^\infty y^2 \Pi(dy) < \infty$.

Определим в фазовом пространстве $[0, \infty)$ однородный марковский процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, следующим образом. До момента достижения нулевого уровня приращения процесса $x(t)$ совпадают с приращениями процесса $\xi(t)$. При попадании на нулевую границу процесс $x(t)$ проводит на ней показательное время τ_{0+} с параметром $1/\mu$, а затем в случайный момент времени τ_{0+} получает не зависящее от предыстории развития процесса неотрицательное приращение ζ с распределением $F(dt)$.

Нас будет интересовать предельное распределение случайной величины $\tau_T = \inf\{t : x(t) \geqslant T\}$, $T \to \infty$.

В [1] эта задача рассматривалась при $k(s) = s^\alpha L(1/s)$, $F(t, \infty) = t^{-\beta} M(t)$, $\Pi(x, \infty) \sim x^{-\alpha} L(x)$ при $x \leftrightarrow \infty$, где $\alpha \in (1, 2)$, $\beta \in (0, 1)$, а L и M — медленно меняющиеся функции.

Здесь мы рассматриваем случай $\alpha = 2$, т. е.

$$\Pi(x, \infty) \sim x^{-2} L(x) \text{ при } x \to \infty. \tag{1}$$

Прежде чем доказывать основной результат, сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть неубывающая непрерывная при $x > 0$ функция $R(x)$ определена уравнением*

$$\int_0^\infty e^{-sx} dR(x) = \frac{s}{k(s)}, \quad s > 0. \tag{2}$$

Тогда имеет место представление

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau_T) - T \geqslant z\} =$$

$$= \frac{\int_0^T R(T-y)\,\Pi(y+z, \infty)\,dy - \int_0^T F(dy) - \int_0^{T-y} R(T-y-u) \times \Pi(u+z, \infty)\,du + F(T+z, \infty)}{R(T) - \int_0^T R(T-y)\,F(dy)} R(T-x) -$$

$$- \int_0^{T-x} R(T-x-y)\,\Pi(y+z, \infty)\,dy, \tag{3}$$

где $T > 0$, $z > 0$, $x \in (0, T)$, а $\mathbf{P}_x$ — условная вероятность при условии $\xi(0) = x$.

Доказательство формулы (3) можно найти в работе [1]. Кроме того, в [1] показано, что функция $R(x)$ удовлетворяет уравнению восстановления

$$R(x) = N(x) + \int_0^x R(x-y)\,dV(y) \tag{4}$$

и

$$R(x) = \int_0^x N(x-y)\,dH(y),$$

где H — функция восстановления, соответствующая распределению $V\cdot$ Тогда, согласно результатам работы [3], справедлива лемма.

Лемма 2. *Если* $x \to \infty$, *то*

$$H(x) - H(x-y) \sim \frac{y}{\overline{m}(x)}, \quad H(x) \sim \frac{x}{\overline{m}(x)}, \tag{5}$$

где $\overline{m}(x) = \int_0^x [1 - G(t)]\,dt$, $y > 0$, *и для любых* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *можно указать такое* $p > 0$, *что*

$$\frac{1-\varepsilon}{\overline{m}(x)}\delta < H(x+\delta) - H(x) < \frac{1+\varepsilon}{\overline{m}(x)}\delta \tag{6}$$

для всех $p_0 \geqslant p$ *и всех* $p_0/2 \leqslant x \leqslant 2p_0$.

Из этой леммы, в частности, следует, что если H — функция восстановления, соответствующая распределению V, и $f(x)$ — монотонно убывающая функция при $x \to \infty$, то

$$\frac{1-\varepsilon}{\overline{m}(x)} \int_0^x f(y)\,dy + \frac{4\delta}{\overline{m}(x)} f(x) < H * f(x) < \frac{1+\varepsilon}{\overline{m}(x)} \int_0^x f(y)\,dy - \frac{4\delta}{\overline{m}(x)} f(x). \tag{7}$$

Здесь и далее знак «*» означает свертку функций.

Введем функцию $m(x)$, $x \geqslant 0$:

$$m(x) = \int_0^x dt \int_t^\infty \Pi(y, \infty)\,dy.$$

Очевидно, что при $x \to \infty$ $m(x) \to \infty$ и функции $\overline{m}(x)$ и $m(x)$ эквивалентны [2], а это означает, что соотношения (5) — (7) верны и для функции $m(x)$.

Обозначим через $l(x)$ строго возрастающую непрерывную и обратную к $m(x)$ функцию, т. е. $l[m(x)] = m[l(x)] = x$, и так как при $x \to \infty$ $m(x) \to \infty$, то функция $l(x)$ определена на $(0, \infty)$.

Положим

$$m^{-1}[zm(x)] = l[zm(x)] = z_x. \tag{8}$$

Теорема. *Пусть* $\Pi(T, \infty) \sim T^{-2}L(T)$ *при* $T \to \infty$, *тогда*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}_x\left\{\frac{m[x(\tau_T) - T]}{m(T)} \geqslant z\right\} = 1 - z,$$

где $z \in (0, 1)$, $L(T)$ — *медленно меняющаяся функция.*

Доказательство. Из вероятностных соображений следует

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau_T) - T \geqslant z\} = \mathbf{P}_x\{x(\tau_T^0) - T \geqslant z\} + \int_0^T F(dy)\,\mathbf{P}_y\{x(\tau_T) - T \geqslant z\}, \tag{9}$$

где $\tau_T^0 = \inf\{t : x(t) \notin (0, T)\}$, и с учетом (8) и [2]

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau_T^0) - T \geqslant z_T\} =$$

$$= \frac{R(T-x)}{R(T)} \int_0^T R(T-y)\,\Pi(y+z_T,\infty)\,dy - \int_0^{T-x} R(T-x-y)\,\Pi(y+z_T,\infty)\,dy, \tag{10}$$

а

$$\int_0^T F(dy)\,\mathbf{P}_y\{x(\tau_T)-T \geqslant z_T\} =$$

$$= \frac{\int_0^T F(dy)\Big[R(T-y)\int_0^T R(T-u)\,\Pi(u+z_T,\infty)\,du - R(T)\int_0^{T-y} R(T-y-u)\,\Pi(u+z_T,\infty)\,du\Big] + R(T)\,F(T+z_T,\infty)}{\int_0^T F(dy)\,[R(T)-R(T-y)] + R(T)\,F(T+z_T,\infty)}. \tag{11}$$

Распределение (10) изучалось в [2], откуда вытекает, что при фиксированном x и $T\to\infty$

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau_T^0)-T \geqslant z_T\} \to 0. \tag{12}$$

Рассмотрим (11) и путем несложных выкладок приведем его к виду

$$\int_0^T F(dy)\,\mathbf{P}_y\{x(\tau_T)-T \geqslant z_T\} =$$

$$= \frac{\int_0^T F(dy)\Big[R(T)\int_0^{T-y}\int_{T-y-u}^{T-u} dR(t)\,\Pi(u+z_T,\infty)\,du - R(T-y)\int_0^T\int_{T-u}^{\infty} dR(t)\,\Pi(u+z_T,\infty)\,du\Big] + R(T)\,F(T+z_T,\infty)}{\int_0^T F(dy)\,[R(T)-R(T-y)] + R(T)\,F(T+z_T,\infty)}.$$

Изменив в интегралах, стоящих в квадратных скобках, порядок интегрирования и введя подставку $z_T+u=v$, получим

$$\int_0^T F(dy)\,\mathbf{P}_y\{x(\tau_T)-T \geqslant z_T\} =$$

$$= \frac{\int_0^T F(dy)\Big[R(T)\int_0^{T-y} dR(t)\int_{T-y-t+z_T}^{\infty}\Pi(v,\infty)\,dv - R(T-y)\int_0^T dR(t)\int_{T-t+z_T}^{\infty}\Pi(v,\infty)\,dv\Big] + R(T)\,F(T+z_T,\infty)}{\int_0^T F(dy)\,[R(T)-R(T-y)] + R(T)\,F(T+z_T,\infty)}. \tag{13}$$

Пусть

$$\int_{T-y-t+z_T}^{\infty} \Pi(v,\infty)\,dv = p_{z_T}(T-y-t). \tag{14}$$

Тогда с учетом (4) и (14) соотношение (13) примет вид

$$\int_0^T F(dy)\,\mathbf{P}_y\{x(\tau_T)-T \geqslant z_T\} =$$

$$\int\limits_0^T F(dy)\Big[R(T)\int\limits_0^{T-y} H*p_{z_T}(T-y-u)\,dN(u)-$$

$$=\frac{-R(T-y)\int\limits_0^T H*p_{z_T}(T-u)\,dN(u)\Big]+R(T)\,F(T+z_T,\,\infty)}{\int\limits_0^T F(dy)\,[R(T)-R(T-y)]+R(T)\,F(T+z_T,\,\infty)}, \qquad (15)$$

где

$$H*p_{z_T}(T-y)=\int\limits_0^{T-y} dH(t)\int\limits_{T+z_T-t-y}^{\infty}\Pi(v,\,\infty)\,dv.$$

Отсюда, согласно лемме 2, с учетом того, что при $T\to\infty$ $\overline{m}(T)\sim m(T)$, получаем

$$\frac{1-\varepsilon}{m(T)}\int\limits_0^{T-y} dt\int\limits_{z_T+T-y-t}^{\infty}\Pi(v,\,\infty)\,dv+\frac{4\delta}{m(T)}<H*p_{z_T}(T-y)<$$

$$<\frac{1+\varepsilon}{m(T)}\int\limits_0^{T-y} dt\int\limits_{z_T+T-y-t}^{\infty}\Pi(v,\,\infty)\,dv-\frac{4\delta}{m(T)}. \qquad (16)$$

Из определения функции $m(T)$ следует

$$\int\limits_0^{T-y} dt\int\limits_{z_T+T-y-t}^{\infty}\Pi(v,\,\infty)\,dv=\int\limits_{z_T-y}^{T+z_T-y} dt\int\limits_t^{\infty}\Pi(v,\,\infty)\,dv=m(T+z_T-y)-$$

$$-m(z_T-y). \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и совершая в этих неравенствах предельный переход при $T\to\infty$, находим

$$(1-\varepsilon)\lim_{T\to\infty}\frac{m(T+z_T-y)-m(z_T-y)}{m(T)}\leqslant\varliminf_{T\to\infty}H*p_{z_T}(T-y)\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{T\to\infty}H*p_{z_T}(T-y)\leqslant(1+\varepsilon)\lim_{T\to\infty}\frac{m(T+z_T-y)-m(z_T-y)}{m(T)}. \qquad (18)$$

В [2] доказано, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{m(T+z_T-y)-m(z_T-y)}{m(T)}=1-z.$$

Таким образом, в силу произвольности $\varepsilon>0$ при $T\to\infty$

$$H*p_{z_T}(T-y)\to 1-z. \qquad (19)$$

Аналогично, можно показать, что и

$$H*p_{zT}(T)\to 1-z. \qquad (20)$$

Согласно лемме 2, при $T\to\infty$ имеем

$$R(T)\sim\frac{T}{m(T)},\quad R(T)-R(T-y)\sim\frac{y}{m(T)}. \qquad (21)$$

Тогда, подставляя (19) — (21) в (15) и учитывая, что $\int\limits_0^{\infty} yF(dy)<\infty$, а

$TF(T+z_T, \infty) \to 0$ при $T \to \infty$, получаем

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T F(dy)\, \mathbf{P}_y \{x(\tau_T) - T \geqslant z_T\} = 1 - z. \tag{22}$$

Теперь из (9) имеем

$$\mathbf{P}_x \left\{ \frac{m[x(\tau_T) - T]}{m(T)} \geqslant z \right\} = \mathbf{P}_x \left\{ \frac{m[x(\tau_T^0) - T]}{m(T)} \geqslant z \right\} +$$

$$+ \int_0^T F(dy)\, \mathbf{P}_y \left\{ \frac{m[x(\tau_T) - T]}{m(T)} \geqslant z \right\}.$$

Учитывая (12) и (22), окончательно находим

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}_x \left\{ \frac{m[x(\tau_T) - T]}{m(T)} \geqslant z \right\} = 1 - z.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что предельное распределение случайной величины τ_T при фиксированном x и $T \to \infty$ не зависит от распределения F.

1. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О предельном распределении положения процесса с независимыми приращениями в момент выхода из интервала при наличии границы // Вероятностный бесконечномерный анализ.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981. С. 101—108.
2. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Предельное распределение положения полунепрерывного процесса с независимыми приращениями в момент выхода из интервала // Проблемы теории вероятностных распределений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 96—105.
3. *Erickson K. B.* Strong renewal theorems with infinite mean // Trans. Amer. Soc.— 1970.— **151**, N 1.— P. 263—291.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 27.08.85