Конечные неразрешимые группы с дополняемыми неметациклическими подгруппами


Теорема. В конечной неразрешимой группе G тогда и только тогда дополняемы все неметациклические подгруппы, когда $G = A \times B$, где $B$ — метациклическая вполне факторизуемая $2^r$-группа, $3^s \nmid |B|$, $5^t \nmid |B|$ и выполняются одно из следующих утверждений:

1) $A \cong PSL(2, 5)$, $PSL(2, 11)$ или $SL(2, 5)$;
2) $A \cong SL(2, 11)$, а $B = C \times D$, $|C| = 1$ или $5$ и $11^2 \nmid |D|$, $5 \nmid |D|$;
3) $A \cong PGL(2, 11)$, $11^2 \nmid |B|$.

Пусть $G$ — произвольная неметациклическая группа, обладающая свойством: любая неметациклическая подгруппа из $G$ дополнима в $G$. Тогда все неметациклические подгруппы и неметациклические фактор-группы $G$ обладают тем же свойством. Кроме того, фактор-группы $G$ по ее неметациклическому нормальному делителю вполне факторизуемы. Отметим, что слово «группа» ниже означает «конечная группа».

Лемма 1. Простая группа $G$ с дополняемыми неметациклическими подгруппами изоморфна $PSL(2, 5)$ или $PSL(2, 11)$.


Отсюда и из результатов работ [8, 9] следует, что $G$ изоморфна одной из групп: $PSL(2, p^n)$, $p > 2$; $PSL(3, q)$, $PSU(3, q^2)$, $q$ — нечетно; $A_7$ или $M_{11}$.


б). $G \cong PSL(3, q)$. Если $q = p^n$, то сильвовская п-подгруппа $G_p$ группы $G$ в $G$ недополнима [10]. Следовательно, $G_p$ — метациклическая группа. Отсюда и из теорем 7.1 гл. II, 16.5 и 16.6 гл. III работы [5] следует, что $q = 2$. Но тогда $G \cong PSL(3, 2) \cong PSL(2, 7)$. Так как в $PSL(2, 7)$ недополнима подгруппа, изоморфная $A_4$, то рассматриваемый случай невозможен.

в). $G \cong PSU(3, q^2)$, $q$ — нечетное число. Группа $G$ содержит подгруппу $A = B \times C$, где $|B| = q^2$, $|C| = (q^2 - 1)/d$, $d = (3, q + 1)$ и $|B'| = |Z(B)| = q$, Укр. мат. журн., 1987, т. 39, № 5
причем $A' = B$ и $C$ — циклическая группа (см. [15, c. 242—245]). Так как в силу теоремы 8.6 гл. IV [5] $B$ — неметациклическая группа, то $C \cong A \times B$ — вполне факторизуемая группа. Это противоречит ее цикличности и соотношению $4 \left| \frac{d^2-1}{d} \right| = |C|$. Следовательно, этот случай невозможен.

g). $G \cong A_4$. Группа $G$ содержит подгруппу изоморфную $A_6 \cong PSL(2, 9)$, а в последние есть недопустимые неметациклические подгруппы. Пример с противоречием.


Следствие. Пусть $G$ — простая минимальная неразрешимая группа. Если в $G$ допустимы все неметациклические подгруппы, то $G \cong A_3$.

Лемма 2. Если $G$ — полупростая группа с допустимыми неметациклическими подгруппами, то $G$ изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 11)$ или $PGL(2, 11)$.

Доказательство. Пусть $G$ — непростая группа и $K$ — ее минимальный нормальный делитель. Тогда ввиду допустимости в $G$ неметациклических подгрупп $K$ — простая группа, а $G/K$ — вполне факторизуемая. Так как ввиду полупростоты $G$, $G/K = 1$, то в силу леммы 1 $G$ изоморфен $PGL(2, 5)$ или $PGL(2, 11)$.

Предположим, что $G \cong PGL(2, 5)$. Если $T$ — дополнение в $G$ к подгруппе $B \cong A_4$ из $K \cong PSL(2, 5)$, то $|T| = 10$. Следовательно, $T$ содержится в нормализаторе $N = N_G(T)$ силосковой 5-подгруппы $T_5$ из $T$ в группе $G$. Но $N$ — полупроецное производство $T_5$ на циклическую группу порядка 4 [5]. Значит, $T \subset K$ и потому $T \cap B = 1$. Из полученного противоречия следует, что рассматриваемый случай невозможен.

Нетрудно убедиться, что в группе $PGL(2, 11)$ все неметациклические подгруппы допустимы. В частности, подгруппу $B \cong A_4$ дополняет нормализатор силосковой 11-подгруппы. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $G$ — неразрешимая группа с допустимыми неметациклическими подгруппами. Если $1 \neq R = R(G) = 2$-группа, то $G \cong SL(2, 5)$ или $SL(2, 11)$.

Доказательство. Ввиду леммы 2 $G/R$ изоморфна одной из групп: $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 11)$, $PGL(2, 11)$, $PSL(2, 11)$, $PGL(2, 11)$, $PSL(2, 11)$,

1). $G/R \cong PSL(2, 5)$. Так как $PSL(2, 5)$ не содержит подгрупп порядка 15 и 20, то $G$ — метациклическая, а $RG$ — нильпотентная группа. Поэтому в прообразе подгруппы порядка 12 фактор-группы $G/R$ в группе $G$ элемент порядка 3 действует нерегулярно. Следовательно, в силу леммы В. Д. Мазурова [4] $G_2$ — группа кватернионов порядка 8 и $|R| = 2$. Применим лемму Шура [12], получаем $G \cong SL(2, 5)$.

2). $G/R \cong PSL(2, 11)$. Аналогичными рассуждениями убеждается, что $G \cong SL(2, 11)$.

3). $G/R \cong PGL(2, 11)$. Тогда если $A$ — прообраз в $G$ подгруппы $A \cong PSL(2, 11)$ из $G$, то по предыдущему $A \cong SL(2, 11)$. Следовательно, $G = A \times (x)$, где $x^2 = 1$ и $G/Z(A) \cong PGL(2, 11)$. Нетрудно убедиться, что нормализатор $N = N_G(G_2)$ силосковой 5-подгруппы $G_5$, в группе $G$ является неметациклической группой порядка 40. Так как $G$ не содержит подгрупп порядка 13-3, то $N$ недопустим в $G$. Следовательно, этот случай невозможен. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $G$ — неразрешимая группа с допустимыми неметациклическими подгруппами. Если $G/R(G)$ изоморфна $PSL(2, 5)$, то $G = A \times B$, где $A \cong PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$, а $B$ — метациклическая вполне факторизуемая 2-группа, причем $5^2 \nmid |B|$, $3^2 \nmid |B|$.

Доказательство. Пусть $G$ — контрпример минимального порядка к лемме. Тогда ввиду леммы $3R = R(G)$ — не 2-группа. Далее, $R$ — метациклическая группа и, значит, сверхразрешима. Поэтому подгруппа 548
Р дисперсивна по Оре. Пусть $p$ — наибольшее простое число, делящее $|R|$, и $P$ — силовая $p$-подгруппа из $R$. Тогда $P \triangleleft G$. Рассмотрим следующие случаи.

а). $p > 5$. По теореме Цассенхаузена [5, с. 126] $G = P \times H$. В силу выбора группы $G$ имеем место разложение $H = A \times C$, где $A \cong PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$, а $C$ — метаакциклическая вполне факторизуемая $2'$-группа, причем $5^2 \nmid |C|$, $3^3 \nmid |C|$. Тогда $G = P \times (A \times C)$. Если $C \neq 1$, то $PA \neq G$ и поэтому $PA = P \times A$ и $G = A \times PC$. что противоречит выбору $G$. Пусть $C = 1$, т. е. $G = P \times A$. Так как подгруппа $P(A)$ не метаакциклическая и, значит, дополняема в $G$, то $P(A) = 1$. Ввиду недополняемости в группе $A$ ее силовой 2-подгруппы $T$ группа $PT$ метаакциклична. Отсюда, из теоремы Машке [5] и из неметаакцикличности нормализатора $N_A(T)$ следует $[P, T] = 1$. Но тогда $[P, A] = 1$. Пришли к противоречию.

б). $p = 5$. Тогда $G/P = G = A \times B$, где $A \cong PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$ и $|B| = 3$ или 1. Пусть сначала $|B| = 3$. Тогда если $A$ — прообраз подгруппы $A$ в $G$, то в силу выбора группы $G$ подгруппа $A$ разных $A \times B_1$, где $|B_1| = 5$, а $A \cong PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$. Отсюда из теоремы Гашотта [5] следует $G = B_1 \times G_1$. В силу выбора группы $G G_1 = D \times V$, где $D \cong PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$, а $|V| = 5$. Противоречие.

Пусть теперь $|B| = 1$. Если $P$ — абелева группа, то $[P, G_1] = 1$, так как $PSL(2, 5)$ и $SL(2, 5)$ не содержат подгрупп индекса 3. Поэтому $C_5(P) = G$. Пусть $K$ — прообраз в $G$ неабелевой подгруппы порядка 10 из $G/R$. Так как $K/R$ неприводима, то $K$ — тоже неприводима с абелевыми силовыми подгруппами. Следовательно, $K' \cap Z(K) = 1$ и $K'$ дополняем в $K$ (см. [5], § 14 гл. VI). Так как, очевидно, $P \cap K = 1$ и $PK'$ — силовая 5-подгруппа из $G$, то по теореме Гашотта $G = P \times G_1$, где $G_1 \cong PSL(2, 5)$ или $SL(2, 5)$. Пришли к противоречию.

Пусть $P$ — абелева группа. Тогда, рассматривая фактор-группу $G/P'$, в силу выбора группы $G$ получаем $|P/P'| = 5$. Противоречие.


Лемма 5. Пусть $G$ — неразрешимая группа с дополняемыми метаакциклическими подгруппами. Если $G/R(G) \cong PSL(2, 11)$, то $G$ относится к одному из следующих двух типов групп:

1) $G = A \times B$, где $A \cong PSL(2, 11)$, $B$ — метаакциклическая вполне факторизуемая, причем $3^2 \nmid |B|$, $5^2 \nmid |B|$;
2) $G = A \times B \times C$, где $A \cong SL(2, 11)$, $B$ — метаакциклическая вполне факторизуемая $2'$-группа, $|C| = 1$ или $5$, причем $11^2 \nmid |B|$, $3^2 \nmid |B|$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Лемма 6. Пусть $G$ — неразрешимая группа с дополняемыми метаакциклическими подгруппами. Если $G/R(G) \cong PGL(2, 11)$, то $G = A \times B$, где $A \cong PGL(2, 11)$, $B$ — метаакциклическая вполне факторизуемая $2'$-группа, причем $3^2 \nmid |B|$, $5^2 \nmid |B|$, $11^2 \nmid |B|$.

Доказательство. Пусть $G$ — контрпример минимального порядка к лемме. Пусть, далее, $K$ — нормальная в $G = G/R(G)$ подгруппа, изоморфная $PSL(2, 11)$. Тогда ее прообраз $K$ в $G$ ввиду лемм 3 и 5 имеет разложение $K = L \times B$, где $L \cong PSL(2, 11)$ и $B = 2'$-группа. Так как группа $K$ метаакциклична, то $G = (L \times B) \times a$, где $a^2 = 1$. Нетрудно убедиться, что подгруппы $L$ и $B$ можно считать нормальными в $G$.

Покажем, что $[B, a] = 1$. В самом деле, $L(a)$ содержит подгруппу порядка 110 с циклической подгруппой $F$ порядка 10. Так как нормализатор $N_L(T)$ подгруппы $T$ порядка 5 из $F$ в $L$ неабелевых подгрупп 10, то силовая 2-подгруппа из $N = N_{(G_n)}(T)$ нециклическая подгруппа 4. При этом $N \cong LB$. Если $[B, N] = 1$, то подгруппа $BN$ метаакциклична и потому дополняема в $G$. Так как $|BN \cap L| = 10$, то дополнение $Q$ имеет порядок 66, причем $Q \cap B = 1$. Но $G/B \cong PGL(2, 11)$ не содержит подгрупп порядка 110.
ка 11-3. Из полученного противоречия следует, что $[B, N] = 1$, и потому $B$ является прямым множителем группы $G$. Тогда если $G = A \times B$, то $A \simeq PGL (2, 11)$, а $B$ — вполне факторизуема метациклическая $2'$-группа. Так как подгруппы порядков 3, 11 и 5 из $A$ недополняемы в $A$, то $3^2$, $11^2$ и $5^2$ не делают порядок $B$. Лемма доказана.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих трех утверждений.

**Лемма 7.** Пусть $G = A \times B$, где $B$ — вполне факторизуема группа. Если $H$ — такая подгруппа из $G$, что произведение $BH$ дополняемо в $G$, то она дополняема в $G$.

**Лемма 8.** Пусть $G$ — неметациклическая группа с метациклической силовой $p$-подгруппой. Если $G = H \times <a>$, где $|a| = p^2$, то $H$ — неметациклическая группа.

**Лемма 9.** Пусть $G = H \times <a>$, где $|a| = p$, и в группе $H$ дополняемы все неметациклические подгруппы. Если силовая $p$-подгруппа группы $H$ циклическая, то в группе $G$ дополняемы все неметациклические подгруппы.

**Доказательство теоремы. Необходимость** следует из лемм 2, 4—6.

**Достаточность.** Прежде всего заметим, что в группе типа 2 можно считать ввиду леммы 9, что $|C| = 1$.

Пусть $G$ — группа одного из типов 1—3 доказываемой теоремы, $H$ — ее неметациклическая подгруппа. Ввиду леммы 7 доказательство дополнительности $H$ в группе $G$ сводится к доказательству дополняемости в $G$ подгруппы $HB$. Так как $T = HB = B \times A_1$, где $A_1 \leq A$, то последние очевидно, если $A_1$ дополняема в $A$, в частности, если она неметациклическа.

Предположим, что $A_1$ — метациклическая подгруппа из $A$ и рассмотрим подгруппу $T = A_1 \times B$ из $G$. Покажем, что $T$ либо метациклическая, либо дополняема в $G$. Пусть $K \leq A_1$, $L \leq B$ и группы $K, L, A_1/K$ и $B/L$ — циклические. Тогда $T/KL = A_1L/KL \cdot BK/KL$, причем $A_1L/KL \simeq A_1/K (A_1 \cap L)$. Рассмотрим возможные случаи:

1. $A \simeq PSL (2, 5)$ или $SL (2, 5)$. Так как $B = 2'$-группа, то можно считать, что $|L|, 30 = 1$. Но тогда $KL$ — циклическая группа. Далее, $A_1/K$ — двойная, а $B/L$ — циклическая. Значит, $T/KL$ — циклическая, а $T$ — метациклическая группа.

2. $A \simeq PSL (2, 11)$. Если $|A_1| = 11$, то $A_1 \leq N_A (A_1)$, порядок которого 11-5. Если $|A_1| = 11$, то подгруппа $Q \approx PSL (2, 5)$, а если $|A_1| = 11$, то подгруппа $Q_1 \simeq A_1$ из $A$ дополняет $A_1$ в $A$ (а значит, $H$ в $G$).

Пусть $11 \nmid |A_1|$. Аналогично случаю 1 убеждаемся, что $T$ — метациклическая группа.

3. $A \simeq SL (2, 11)$. Тогда можно считать, что $|L|, 330 = 1$ и потому $KL$ — циклическая группа. Если $|A_1|, 10$, то $A_1/K, 10$. Так как $B = (2, 5)'$-группа, то $T$ — метациклическая группа. Если $11 \nmid |A_1|$, то рассмотрим аналогичные случаи 1.

4. $A \simeq PGL (2, 11)$. Если $11 \nmid |A_1|$, то $A_1 \leq N = N_A (A_1)$, порядок которого 110. Если $A_1 = N$, то поскольку $N \not\subset R \subset A$, $R \simeq PSL (2, 11)$, то подгруппа, изоморфная $A_1$ из $R$, дополняет $A_1$ в $A$. Если же $|A_1| = 11$, то подгруппа дополняется в $A$ нормализатором в $A$ силовой 2-подгруппой $R_2$ из $R$. Отметим наконец, что если $|A_1| = 11$, то ввиду леммы 7 $T$ — метациклическая группа.

Пусть $11 \nmid |A_1|$. Аналогично случаю 1 убеждаемся, что $T$ — метациклическая группа. Теорема доказана.

Закон асимптотических выражений в теории функциональных уравнений в Кₜ-пространствах

Пусть \( X - K_{\alpha} \)-пространство с классом положительных элементов \( X_{+} \) (пользуемся терминологией и определениями из [1]). Для любого \( x \in X_{+} \) обозначим через \( X_{x} \) подпространство тех \( y \in X \), для которых \( |y| \leq \alpha x \) при некоторой постоянной \( \alpha > 0 \), зависящей от \( y \). Пусть \( A \) — положительный (\( o \))-линейный оператор в \( X \). Предположим, что для некоторых элементов 
\[ z = Ax = w. \]  
(1)

Тогда согласно результатам Л. В. Канторовича (см. [1], гл. XII), для любого \( v \in X_{w} \) в \( X_{x} \) существует единственное решение уравнения

\[ x = Ax = v. \]  
(2)

Это решение может быть получено по методу последовательных приближений (относительно (\( o \))-сходимости в \( X \)) при начальном элементе \( x_{0} = 0 \):

\[ x = \sum_{k=0}^{\infty} A^{k} v. \]  
(3)

Всюду далее: такие решения будем называть главными. При этом если \( |v| \leq \alpha w \), то \( |x| \leq \alpha z \), если \( v \in X_{+} \), то \( x \in X_{+} \).


1. Пусть \( X_{k} \subseteq X_{k+1} \), \( k = 1, 2, \ldots \), — некоторая последовательность главных компонент пространства \( X \). Обозначим через \( P_{k} \) оператор проектирования \( X \) на \( X_{k} \), а через \( Q_{k} \) — оператор проектирования \( X \) на дизъюнкт-