Доказательство. Поскольку число положительных $\alpha_{i,n}$ не убывает, то либо $\forall k$ можно указать N такое, что число положительных $\alpha_{i,n}$ больше k при $n \geqslant N$ (это эквивалентно выполнению условия S), либо для достаточно больших n число положительных $\alpha_{i,n}$ величина постоянная. В этом случае существует конечное число фундаментальных последовательностей $(A^n_{i_1(n)}), \ldots, (A^n_{i_p(n)})$, что $\alpha_{i_j,n} > 0\ \forall n$, $j = \overline{1, p}$, и $P\{\mu(X) = 1\} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i_j,n}$, но $\alpha_{i,n} \leqslant P\{\mu(A^n_i) = 1\}$, и, следовательно, $P\{\mu(X) = 1\} = 0$. Таким образом, стохастически непрерывная марковская считающая мера с $P\{\mu(X) = 1\} > 0$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть мера $\tilde{\mu}$ на $(X, \mathfrak{A})$ является целочисленной мерой с независимыми значениями и производящая функция случайной величины $\tilde{\mu}(A)$ есть

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} m_i(A) z^i\right\} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} m_i(A)\right\}. \tag{6}$$

Тогда распределения меры μ можно представить в виде

$$P\{\mu(A_1) = k_1, \ldots, \mu(A_l) = k_l\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{l} P\{\tilde{\mu}(A_i) = k_i\} \sum_{r} \frac{P\{\mu(X) = r + k_1 + \ldots + k_l\}}{P\{\tilde{\mu}(X) = r + k_1 + \ldots + k_l\}} P\left\{\tilde{\mu}\left(X - \sum_{1}^{l} A_i\right) = r\right\}.$$

Рассмотрим характеристический функционал меры μ $\mathrm{X}_\mu(g)$. Пусть $g(z) = \sum_{1}^{l} g_i I_{A_i}(z)$, $A_i \in \mathfrak{A}$. Тогда с учетом (6)

$$\mathrm{X}_\mu(g) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(X) = k\}\, M\{e^{\int g(z) d\tilde{\mu}(z)} / \tilde{\mu}(X) = k\}. \tag{7}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Характеристический функционал марковской считающей меры μ, удовлетворяющей условию S, представим в виде* (6), (7).

1. *Скороход А. В.* Несколько замечаний о случайных мерах // Вестн. Киев. ун-та. Сер. астроном., мат. и мех.— 1958.— Вып. 1.— С. 105—114.
2. *Баховец Е. Б.* Об одном классе целочисленных марковских мер // Случайные процессы. Теория и практика.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 3—14.

Киев. ун-т
Получено 16.12.85

УДК 517.53

А. П. Голуб

О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций

1. Введение. Приведем необходимые сведения и определения.

Определение 1 (см., например, [1]). *Пусть $F = \{f_k(z)\}_{k=1}^n$ — набор аналитических в окрестности точки $z = 0$ функций, а $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ — вектор, координатами которого являются неотрицательные целые числа, сумма которых равна некоторому числу $N = N(\vec{r}) \in \mathbb{N}^1$. Совместными аппроксимациями Паде набора функций $\{f_k(z)\}_{k=1}^n$ порядка $([N/N]; \vec{r})$ на-*

зываются рациональные полиномы $\pi_{N,N}^{(k)}\{F;\vec{r};z\}$, $k=\overline{1,n}$, *порядка* $[N/N]$ *с общим знаменателем, для которых справедливы асимптотические равенства*

$$f_k(z)-\pi_{N,N}^{(k)}\{F;\vec{r};z\}=O(z^{N+r_k+1}) \text{ при } z\to 0, \quad k=\overline{1,n}. \tag{1}$$

Аппроксимации такого типа были впервые рассмотрены Ш. Эрмитом для системы экспонент [2] в связи с вопросом о трансцендентности числа e. За последнее время теория совместных аппроксимаций Паде пополнилась новыми содержательными результатами. В настоящей работе изучается сходимость совместных аппроксимаций Паде для набора вырожденных гипергеометрических функций с применением предложенных В. К. Дзядыком [3] обобщенных моментных представлений.

Определение 2. *Для набора* $F=\{f_k(z)\}_{k=1}^{n}$ *вектор-индекс* $\vec{r}$ *будем называть нормальным, если знаменатель совместных аппроксимаций Паде* $Q_N(z)$ *порядка* $([N/N],\vec{r})$ *существует и имеет степень в точности* N.

Определение 3. *Набор функций* F *будем называть совершенным, если для него любой вектор-индекс нормален.*

Определение 4 (см. [3]). *Будем говорить, что для последовательности комплексных чисел* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *построено обобщенное моментное представление, если на некотором множестве* $X\subset\mathbb{R}$ *определены неубывающая функция* $\mu(t)$ *и две последовательности функций* $\{a_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ *и* $\{b_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$, *для которых при произвольных* $i,j=\overline{0,\infty}$ *выполняются равенства*

$$s_{i+j}=\int_X a_i(t)\,b_j(t)\,d\mu(t). \tag{2}$$

В работах [4, 5] обобщенные моментные представления использовались для изучения обычных и двухточечных аппроксимаций Паде.

2. Связь обобщенных моментных представлений с совместными аппроксимациями Паде.

Теорема 1. *Пусть* $F=\{f_k\}_{k=1}^{n}$ — *набор аналитических в окрестности точки* $z=0$ *функций, имеющих степенные разложения*

$$f_k(z)=f_k(0)+\sum_{i=0}^{\infty}s_i^{(k)}z^{i+1}, \quad |z|\leqslant R. \tag{3}$$

и для каждой из последовательностей $\{s_i^{(k)}\}_{i=0}^{\infty}$, $k=\overline{1,n}$, *построены обобщенные моментные представления вида*

$$s_{i+j}^{(k)}=\int_0^1 a_i^{(k)}(t)\,b_j(t)\,d\mu(t), \qquad i,j=\overline{0,\infty};\ k=\overline{1,n}, \tag{4}$$

причем $\mu(t)$ *имеет бесконечное число точек роста на* $[0,1]$, *система функций* $\{a_i^{(k)}(t): i=\overline{0,r_k-1},\ k=\overline{1,n}\}$ *является чебышевской на* $[0,1]$ *для любого вектор-индекса* $\vec{r}=(r_1,\ldots,r_n)$, *а функции* $b_j(t)$ *имеют вид* $b_j(t)=\beta_j t^j$, $\beta_j\neq 0$, $j=\overline{0,\infty}$.

Тогда набор F *будет совершенным, и если обозначить через* $B_N(t)=\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}b_j(t)$ *не равный тождественно нулю обобщенный полином, удовлетворяющий условиям биортогональности*

$$\int_0^1 B_N(t)\,a_i^{(k)}(t)\,d\mu(t)=0, \qquad i=\overline{0,r_k-1};\ k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

то рациональные полиномы

$$\pi_{N,N}^{(k)}\{F;\vec{r};z\}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}T_j(f_k;z)}{\sum\limits_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}},\qquad k=\overline{1,n},\tag{6}$$

где $T_j(f_k;z)$ — *многочлен Тейлора функции* $f_k(z)$ *порядка* j, *будут осуществлять совместные аппроксимации Паде набора* F *порядка* $([N/N],\vec{r})$.

Если дополнительно предположить, что ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i^{(k)}(z)z^i$, $k=\overline{1,n}$, *равномерно сходятся к аналитическим по* z *в некоторой области* $D\subset\mathbb{C}$ *функциям* $A_k(z,t)$ *и почленно интегрируемы, то погрешности приближения запишутся в виде*

$$f_k(z)-\pi_{N,N}^{(k)}\{F;\vec{r};z\}=\frac{z^{N+1}}{Q_N(z)}\int\limits_0^1 A_k(z,t)B_N(t)\,d\mu(t)\ \ \forall z\in D,\ k=\overline{1,n},\tag{7}$$

где $Q_N(z)=\sum\limits_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что многочлен $B_N(t)$, удовлетворяющий (5), при условиях теоремы существует и имеет в точности N вещественных простых корней на $(0, 1)$ (см., например, [1]). Отсюда, в частности, следует, что $c_N^{(N)}\neq 0$, $c_0^{(N)}\neq 0$, $N=\overline{0,\infty}$.

Умножим (4) на z^i и просуммируем по i от -1 до ∞:

$$\frac{f_k(z)-T_j(f_k;z)}{z^j}=z\int\limits_0^1 A_k(z,t)\,b_j(t)\,\mathrm{d}\mu(t).\tag{8}$$

Умножим обе части (8) на $c_j^{(N)}$ и просуммируем по j от 0 до N:

$$f_k(z)\,Q_N(z)-\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}T_j(f_k;z)=z^{N+1}\int\limits_0^1 A_k(z,t)\,B_N(t)\,\mathrm{d}\mu(t),$$
$$k=\overline{1,n}.\tag{9}$$

Принимая во внимание свойства биортогональности многочленов $B_N(t)$, убеждаемся в справедливости формул (6) и (7). Легко также заключить, что набор функций F является совершенным, так как полученный знаменатель $Q_N(z)$ согласно сделанному в начале доказательства замечанию имеет степень в точности N.

Следствие. *Набор вырожденных гипергеометрических функций*

$$\{{}_1F_1(1;\nu_k+1;z)\}_{k=1}^{n},\ \nu_k-\nu_m\notin\mathbb{Z}\ \textit{при}\ k\neq m,\ \nu_k>-1,\qquad k=\overline{1,n}$$

является совершенным.

Доказательство. Указанный факт следует из теоремы 2.1 [5], в которой построены обобщенные моментные представления для последовательности коэффициентов степенного разложения гипергеометрической функции:

$${}_1F_1(1;\nu+1;z)=1+\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^{k+1},\quad s_{i+j}=\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{i+\nu}}{\Gamma(i+\nu+1)}\,\frac{t^j}{j!}\,dt,$$
$$i,j=\overline{0,\infty},$$

и того обстоятельства, что система функций $\{(1-t)^{\nu_k}\}_{k=1}^{n}$, $\nu_k-\nu_m\notin\mathbb{Z}$ при $k\neq m$, $\nu_k>-1$, $k=\overline{1,n}$ является АТ-системой на $[0,1]$ (см. [1]).

3. Расположение нулей знаменателя.

Лемма 1. *$\forall R>0$ $\exists N_0\in\mathbb{N}^1$ такое, что $\forall N\geqslant N_0$ и для произвольного алгебраического многочлена степени в точности N, все нули которого расположены на $(0,1)$:*

$$B_N(t)=\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}\frac{t^j}{j!},\quad c_N^{(N)}\neq 0,$$

алгебраический многочлен $Q_N(z)=\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}$ *в круге* $K_R=\{z:|z|\leqslant R\}$ *не имеет корней.*

Доказательство. Очевидно, многочлен $B_N(t)$ можно представить в виде $B_N(t)=\beta_N\prod_{j=1}^{N}(t-t_j^{(N)})$, где $t_j^{(N)}\in(0,1)$, $j=\overline{1,N}$.

Будем полагать $\beta_N=1$, поскольку постоянный множитель не влияет на расположение корней. Таким образом $c_j^{(N)}=j!\,(-1)^{N-j}\sigma_{N-j}$, где $\sigma_j=$ $=\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1-1}\cdots\sum_{i_j=1}^{i_{j-1}-1}t_{i_1}^{(N)}t_{i_2}^{(N)}\ldots t_{i_j}^{(N)}$, $j=\overline{1,N}$, $\sigma_0=1$.

При каждом $N\in\mathbb{N}^1$ и каждом $B_N(t)$ возьмем число

$$\alpha_N=\frac{t_1^{(N)}+t_2^{(N)}+\ldots+t_N^{(N)}}{N}$$

и построим вспомогательные функции

$$f_N(z)=\exp\{-\alpha_N z\},\ g_N(z)=\frac{1}{N!}Q_N(z)-\exp\{-\alpha_N z\}.$$

Очевидно, обе функции аналитические во всей комплексной плоскости. Чтобы воспользоваться теоремой Руше, покажем, что $|g_N(z)|\to 0$ при $N\to\infty$ равномерно на любом компакте $K\subset\mathbb{C}$. Имеем

$$\frac{1}{N!}Q_N(z)=\frac{1}{N!}\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}=\frac{1}{N!}\sum_{j=0}^{N}j!\,(-1)^{N-j}\sigma_{N-j}z^{N-j}=$$

$$=\frac{1}{N!}\sum_{j=0}^{N}(N-j)!\,(-z)^j\sigma_j.$$

Следовательно,

$$g_N(z)=\sum_{j=0}^{N}\frac{(N-j)!}{N!}(-z)^j\sigma_j-\sum_{j=0}^{N}\frac{(-z)^j}{j!}(\alpha_N)^j-\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{(-z)^j}{j!}(\alpha_N)^j.$$

Обозначим $r_{N+1}\overset{\mathrm{df}}{=}-\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{(-z)^j}{j!}(\alpha_N)^j$. Очевидно, r_{N+1} на любом компакте можно оценить сверху величиной, стремящейся к нулю при $N\to\infty$ и не зависящей от расположения корней $t_1^{(N)},t_2^{(N)},\ldots,t_N^{(N)}$. Таким образом, $g_N(z)=\sum_{j=0}^{N}(-z)^j\left(\frac{(N-j)!}{N!}\sigma_j-\frac{(\alpha_N)^j}{j!}\right)+r_{N+1}$. Обозначим $u_{N,j}=\frac{(N-j)!}{N!}\sigma_j-$ $-\frac{(\alpha_N)^j}{j!}$, $j=\overline{0,N}$. Легко видеть, что

$$u_{N,0}=u_{N,1}=0,$$

$$u_{N,j}=\frac{(N-j)!\,N^{j-1}j\,!\,\sigma_j-(N-1)!\,(t_1^{(N)}+t_2^{(N)}+\ldots+t_N^{(N)})^j}{N!\,N^{j-1}j!}=$$

$$=(N-j)!\,\frac{j!\,\sigma_j-(t_1^{(N)}+t_2^{(N)}+\ldots+t_N^{(N)})^j}{N!j!}-$$

$$\frac{[(N-1)!-N^{j-1}(N-j)!]\,(t_1^{(N)}+t_2^{(N)}+\ldots+t_N^{(N)})^j}{N!N^{j-1}j!}\overset{\mathrm{df}}{=}v_{N,j}-w_{N,j},\;\; j=\overline{2,N}.$$

Чтобы оценить $v_{N,j}$, заметим, что среди N^j слагаемых, составляющих $(t_1^{(N)}+t_2^{(N)}+\ldots+t_N^{(N)})^j$ есть $N(N-1)\ldots(N-j+1)=\frac{N!}{(N-j)!}$ таких, сумма которых равна $j!\,\sigma_j$. Таким образом, в числителе после сокращения останется $N^j-\frac{N!}{(N-j)!}$ слагаемых, каждое из которых не превышает по модулю единицы. Итак,

$$|v_{N,j}|\leqslant\frac{N^j-\frac{N!}{(N-j)!}}{N!\,j!}(N-j)!=\frac{1}{j!}\left[\frac{N^{j-1}}{(N-1)(N-2)\cdot\ldots\cdot(N-j+1)}-1\right].$$

Оценим $|w_{N,j}|$:

$$|w_{N,j}|=\left|\frac{(N-j)!\,[(N-1)(N-2)\cdot\ldots\cdot(N-j+1)-N^{j-1}]}{N!\,N^{j-1}\,j!}\times\right.$$

$$\left.\times(t_1^{(N)}+\ldots+t_N^{(N)})^j\right|\leqslant\frac{1}{j!}\left[\frac{N^{j-1}}{(N-1)(N-2)\cdot\ldots\cdot(N-j+1)}-1\right].$$

Таким образом, $|u_{N,j}|\leqslant\frac{2}{j!}\left[\frac{N^{j-1}}{(N-1)(N-2)\cdot\ldots\cdot(N-j+1)}-1\right]\to 0$ при $N\to\infty$.

Пользуясь этим неравенством, можно прийти к выводу о применимости к функциям $f_N(z)$ и $g_N(z)$ теоремы Руше [6, с. 425] и, следовательно, $\forall R>0$ количество корней функции $\frac{1}{N!}Q_N(z)=f_N(z)+g_N(z)$ в круге $K_R=\{z:|z|\leqslant R\}$ должно совпадать с количеством корней функции $f_N(z)$ в этом круге, и, стало быть, должно равняться нулю.

Следствие. *Множество нулей знаменателей совместных аппроксимаций Паде системы вырожденных гипергеометрических функций* $\{{}_1F_1(1;\;\;\nu_k+1;z)\}_{k=1}^n$, $\nu_k-\nu_m\notin\mathbb{Z}$ *при* $k\neq m$, $\nu_k>-1$, $k=\overline{1,n}$, *имеет единственную предельную точку* $z=\infty$.

Доказательство вытекает из теоремы 1, следствия к теореме 1 (см. также их доказательства) и леммы 1.

4. Сходимость совместных аппроксимаций Паде для функций $\{{}_1F_1(1;\nu_k+1;z)\}_{k=1}^n$, $\nu_k>-1$, $k=\overline{1,n}$, $\nu_k-\nu_m\notin\mathbb{Z}$, $k\neq m$.

Теорема 2. *Пусть* $F=\{f_k(z)\}_{k=1}^n$ — *совершенная система функций. Тогда для погрешностей совместных аппроксимаций Паде имеет место аналог интерполяционной формулы Эрмита*:

$$f_k(z)-\pi_{N,N}^{(k)}\{F;\vec{r};z\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{N+r_k+1}f_k(\xi)\frac{Q_N(\xi)}{Q_N(z)}\frac{d\xi}{\xi-z},\qquad(10)$$

где $Q_N(z)$—*знаменатель совместных аппроксимаций Паде порядка* $([N/N],\vec{r})$, $\vec{r}=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, $r_k\in\mathbb{N}^1\cup\{0\}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}r_k=N$, Γ_k — *контур (например, кусоч-*

но-гладкий), охватывающий начало координат и находящийся внутри области аналитичности функции $f_k(z)$.

Доказательство использует определение совместных аппроксимаций Паде и проводится по схеме доказательства интерполяционной формулы Эрмита (см., например, [7, с. 482]).

Теорема 3. *Совместные аппроксимации Паде набора вырожденных гипергеометрических функций $\{{}_1F_1(1; \nu_k+1; z)\}_{k=1}^{n}$, $\nu_k - \nu_m \notin \mathbb{Z}$ при $k \neq m$, $\nu_k > -1$, $k=\overline{1,n}$, порядка $([N/N], \vec{r})$ равномерно сходятся к функциям $f_k(z)$ на любом компакте K комплексной плоскости при $N \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $K \subset K_R$, где K_R — круг достаточно большого радиуса R с центром в начале координат. Выберем такое $N_0 \in \mathbb{N}^1$, что $\forall N \geqslant N_0$ нули знаменателя совместных аппроксимаций Паде находятся вне круга K_{8R}. Для оценки воспользуемся формулой (10) с $\Gamma = \partial K_{2R} = \Gamma_{2R}$. При $z \in K_R$ получим

$$|f_k(z) - \pi_{N,N}^{(k)}\{F; \vec{r}; z\}| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+r_k+1} \times$$

$$\times \sup_{\xi \in K_{2R}} |f_k(\xi)| \sup_{z_1, z_2, \ldots, z_N \in \mathbb{C} \setminus K_{8R}} \frac{\sup\limits_{\xi \in K_{2R}} |\xi - z_1| \ldots |\xi - z_N|}{\inf\limits_{z \in K_R} |z - z_1| \ldots |z - z_N|} \cdot \frac{1}{R} \cdot 2\pi R.$$

Заметим, что если $|\xi - z_k| \leqslant 7R$, то $\dfrac{|\xi - z_k|}{\inf\limits_{z \in K_R} |z - z_k|} \leqslant 1$, если же $|\xi - z_k| > 7R$, то $|z - z_k| \geqslant |\xi - z_k| - |\xi - z| \geqslant |\xi - z_k| - 3R$ и $\left|\dfrac{\xi - z_k}{z - z_k}\right| \leqslant \dfrac{|\xi - z_k|}{|\xi - z_k| - 3R} \leqslant 1 + 3R/4R = 7/4$. Таким образом, $|f_k(z) - \pi_{N,N}^{(k)}\{F; \vec{r}; z\}| \leqslant \left(\dfrac{7}{8}\right)^N \left(\dfrac{1}{2}\right)^{r_k+1} \sup\limits_{\xi \in K_{2R}} |f_k(\xi)| \to 0$ при $N \to \infty$.

1. *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде // Мат. сб.— 1980.— **113**, № 4.— С. 499—519.
2. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // Oeuvres.— 1973.— 3.— P. 151—181.
3. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 6.— С. 8—12.
4. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде // Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде.— Киев, 1981.— С. 3—15.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
5. *Голуб А. П.* Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций // Там же.— С. 16—56.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2-х т.— М. : Наука, 1967.— Т. 1.— 488 с.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.

Ин-т пробл. моделирования в энергетике АН УССР,
Киев

Получено 27.09.85