

## Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I

1. Введение. Известно, что максимальной локальной (в смысле Ли) группой инвариантности  $(n + 1)$ -мерного линейного уравнения Шредингера

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi, \quad (1)$$

где  $\Psi_t = \partial\Psi/\partial t$ ,  $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$ ,  $k \in \mathbb{R}^1$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,

$\Psi = \Psi(t, x)$  — комплекснозначная функция, является обобщенная группа Галилея (группа Шредингера)  $G_2(1, n)$  [1, 2]. Этой группе соответствует алгебра Ли  $AG_2(1, n)$  с базисными операторами

$$P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad a = \overline{1, n}, \quad (2a)$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad b = \overline{1, n}, \quad (2b)$$

$$J = i(\Psi\partial_{\Psi} - \dot{\Psi}\partial_{\dot{\Psi}}), G_a = t\partial_a - \frac{x_a}{2k} J, \quad (2c)$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - \frac{n}{2}(\Psi\partial_{\Psi} + \dot{\Psi}\partial_{\dot{\Psi}}), \quad (2d)$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4k} J - \frac{nt}{2}(\Psi\partial_{\Psi} + \dot{\Psi}\partial_{\dot{\Psi}}), \quad (2e)$$

где

$$\partial_t = \partial/\partial t, \quad \partial_a = \partial/\partial x_a, \quad \partial_{\Psi} = \partial/\partial \Psi, \quad \partial_{\dot{\Psi}} = \partial/\partial \dot{\Psi},$$

\* — знак комплексного сопряжения (по повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование). Операторы (2a)—(2c), образующие алгебру  $AG(1, n)$ , генерируют преобразования группы Галилея  $G(1, n)$ , а операторы (2a)—(2d), образующие алгебру  $AG_1(1, n)$  — преобразования группы  $G_1(1, n)$ .

В работах [3, 4] построены широкие классы нелинейных уравнений второго порядка, инвариантных относительно группы  $G_2(1, n)$  и ее подгрупп.

В данной работе, являющейся естественным продолжением статьи [4], рассматриваются системы нелинейных эволюционных уравнений вида

$$\lambda_1 \Psi_t^{(1)} = A_{ab}^{(1)}(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) \Psi_{ab}^{(1)} + B^{(1)}(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}), \quad (3)$$

$$\lambda_2 \Psi_t^{(2)} = A_{ab}^{(2)}(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) \Psi_{ab}^{(2)} + B^{(2)}(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}),$$

где  $\lambda_m = \text{const} \neq 0$ ,  $\Psi_t^{(m)} = \partial\Psi^{(m)}/\partial t$ ,  $\Psi_{ab}^{(m)} = \partial^2\Psi^{(m)}/(\partial x_a\partial x_b)$ ,  $\Psi_a^{(m)} = \partial\Psi^{(m)}/\partial x_a$ ,  $\Psi^{(m)} = (\Psi_1^{(m)}, \dots, \Psi_n^{(m)})$ ,  $m = 1, 2$ ,  $a, b = \overline{1, n}$ ,  $A_{ab}^{(m)}$ ,  $B^{(m)}$  — произвольные дифференцируемые комплексные или действительные функции.

В случае комплексных функций  $\Psi = \Psi^{(1)} = \dot{\Psi}^{(2)}$ ,  $A_{ab} = A_{ab}^{(1)} = \dot{A}_{ab}^{(2)}$ ,  $B = B^{(1)} = \dot{B}^{(2)}$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = i$  система уравнений (3) превращается в пару комплексно сопряженных нелинейных уравнений шредингеровского типа

$$i\Psi_t = A_{ab}(\Psi, \dot{\Psi})\Psi_{ab} + B(\Psi, \dot{\Psi}, \dot{\Psi}), \quad (4a)$$

$$-i\dot{\Psi}_t = \dot{A}_{ab}(\Psi, \dot{\Psi})\dot{\Psi}_{ab} + \dot{B}(\Psi, \dot{\Psi}, \Psi, \dot{\Psi}), \quad (4b)$$

где индексы возле искоемых функций  $\Psi$ ,  $\dot{\Psi}$  обозначают дифференцирование по переменным  $t, x_1, \dots, x_n$  (ниже комплексно сопряженные уравнения вида (4b) опускаются).

В настоящей работе решены следующие задачи:

1) описаны нелинейные системы уравнений второго порядка вида (3), инвариантные относительно цепочек групп  $G(1, n) \subset G_1(1, n) \subset G_2(1, n)$ ;

2) доказано, что среди множества уравнений (4) инвариантными относительно группы  $G_2(1, n)$  являются только уравнения вида

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \Psi|\Psi|^{4/n}F(\hat{\theta}), \quad (5)$$

где  $\hat{\theta} = \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a} \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a} |\Psi|^{-2-4/n}$ ,  $|\Psi| = \sqrt{\Psi\Psi^*}$ ,  $F$  — произвольная дифференцируемая функция;

3) найдены анзацы, с помощью которых многомерные нелинейные уравнения редуцируются к уравнениям с меньшим числом независимых переменных, и построены в явном виде многопараметрические семейства точных

решений четырехмерных нелинейных уравнений

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\Psi|\Psi|^{4/3}, \quad (6)$$

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\Psi \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a} \frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a} |\Psi|^{-2}. \quad (7)$$

Отметим, что уравнения (6), (7) являются простейшими среди нелинейных уравнений (5) при  $n = 3$ . Построению точных решений уравнения (6) посвящена работа [5]. Ниже получен ряд новых результатов. В частности, найдены солитоноподобные решения уравнения (6) и решения уравнения (7), содержащие произвольные функции.

2. Системы нелинейных уравнений, инвариантные относительно алгебры Галилея и ее расширений. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) (3). Системы уравнений такого вида в случае действительных коэффициентов широко используются в качестве математических моделей для описания процессов диффузии при химических реакциях и горении в двухкомпонентных средах, в теории тепломассопереноса, в популяционной генетике (см., например, [6]).

С теоретико-алгебранческой точки зрения представляется важным выделить из системы уравнений вида (3) такие, которые инвариантны относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  или достаточно широких ее подалгебр  $AG(1, n)$  и  $AG_1(1, n)$  [7]. Рассмотрим обобщенную алгебру Галилея  $AG_2(1, n)$  с базисными элементами (2a), (2b) и

$$I_\lambda = \lambda_1\Psi^{(1)}\partial_{\Psi^{(1)}} + \lambda_2\Psi^{(2)}\partial_{\Psi^{(2)}}, \quad G = t\partial_a - \frac{x_a}{2}I_\lambda, \quad (8)$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + I_\alpha, \quad (9)$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4}I_\lambda + tI_\alpha, \quad (10)$$

где  $I_\alpha = \alpha_1\Psi^{(1)}\partial_{\Psi^{(1)}} + \alpha_2\Psi^{(2)}\partial_{\Psi^{(2)}}$ ,  $\alpha_m \in \mathbb{R}^1$ . Очевидно, что в случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = i/k$ ,  $\Psi^{(1)} = \Psi^{(2)} = \Psi$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = -n/2$  получаем стандартное представление алгебры  $AG_2(1, n)$  с базисными элементами (2).

**Теорема 1.** Система уравнений (3) инвариантна относительно алгебры Галилея  $AG(1, n)$  с базисными операторами (2a), (2b), (8) тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$\lambda_m\Psi_t^{(m)} = C_m(v)\Delta\Psi^{(m)} + \frac{1 - C_m(v)}{\Psi^{(m)}}\Psi_a^{(m)}\Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)}F_m(v, \theta), \quad m = 1, 2, \quad (11)$$

(здесь и везде ниже суммирование по индексу  $m$  нет), где  $v = (\Psi^{(1)})^{\lambda_1} \times (\Psi^{(2)})^{-\lambda_2}$ ,  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a}$ ,  $C_m, F_m$  — произвольные функции.

**Теорема 2.** Система уравнений (11) инвариантна относительно алгебры  $AG_1(1, n)$  с базисными элементами (2a), (2b), (8), (9) тогда и только тогда, когда она эквивалентна системе

$$\lambda_m\Psi_t^{(m)} = D_m\Delta\Psi^{(m)} + \frac{1 - D_m}{\Psi^{(m)}}\Psi_a^{(m)}\Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)}v^{-2/\delta}f_m(\hat{\theta}), \quad m = 1, 2, \quad (12)$$

если  $\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , или же системе

$$\lambda_m\Psi_t^{(m)} = C_m(v)\Delta\Psi^{(m)} + \frac{1 - C_m(v)}{\Psi^{(m)}}\Psi_a^{(m)}\Psi_a^{(m)} + \Psi^{(m)}v^{-2}\theta g_m(v), \quad m = 1, 2, \quad (13)$$

если  $\delta = 0$ .

В системах уравнений (12), (13)  $\hat{\theta} = \theta v^{-2+2/\delta}$ ,  $D_m = \text{const}$ ,  $f_m$ ,  $g_m$  и  $C_m$  — произвольные функции.

Теорема 3. 1. Система уравнений (12) инвариантна относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  (2а), (2б), (8) — (10) при произвольных  $D_m$  и  $f_m(\hat{\theta})$ , при чем  $\alpha_m = -\frac{n}{2} D_m$ ,  $\delta = -\frac{n}{2} \begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0$ .

2. Система уравнений (13) инвариантна относительно этой же алгебры тогда и только тогда, когда  $C_m(v) = D_m = \text{const}$ , причем  $\alpha_m = -\frac{n}{2} D_m$ ,  $\delta = 0$ .

Доказательства теорем 1—3 проводятся по классической схеме Ли (см. например, [8]). Ввиду громоздкости мы их опускаем (подробности см. в [9]).

Из этих теорем нетрудно получить следующие утверждения.

С л е д с т в и е 1. Среди множества нелинейных уравнений (4) только уравнения

$$i\Psi_t = C(|\Psi|) \Delta \Psi + \Psi^* (k - C(|\Psi|)) \frac{\Psi_a \Psi_{\bar{a}}}{|\Psi|^2} + \Psi F \left( |\Psi|, \frac{\partial |\Psi|}{\partial x_a} \frac{\partial |\Psi|}{\partial x_a} \right), \quad (14)$$

где  $C$ ,  $F$  — произвольные функции, инвариантны относительно алгебры Галилея  $AG(1, n)$  (2а)—(2с).

С л е д с т в и е 2. Нелинейные ДУЧП шредингеровского типа (4) инвариантны относительно алгебры  $AG_2(1, n)$  с базисными операторами (2) тогда и только тогда, когда они эквивалентны уравнениям вида (5).

Нетрудно убедиться, что системы уравнений (12) и (13) при условиях теоремы 3 локальной заменой  $\hat{\Psi}^{(m)} = (\Psi^{(m)})^{1/D_m}$ ,  $m = 1, 2$ ,  $D_m \neq 0$  сводятся соответственно к системам

$$\hat{\lambda}_m \hat{\Psi}_t^{(m)} = \Delta \hat{\Psi}^{(m)} + \hat{\Psi}^{(m)} v^{-2\delta} \hat{f}_m(\hat{\theta}), \quad m = 1, 2, \quad (15)$$

и

$$\hat{\lambda} \hat{\Psi}_t^{(m)} = \Delta \hat{\Psi}^{(m)} + \hat{\Psi}^{(m)} v^{-2\theta} \hat{g}_m(v), \quad m = 1, 2. \quad (16)$$

В (15) приняты обозначения  $\hat{\lambda}_m = \lambda_m/D_m$ ,  $v = (\hat{\Psi}^{(1)})^{\hat{\lambda}_2} (\hat{\Psi}^{(2)})^{-\hat{\lambda}_1}$ ,  $\delta = \hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1 \neq 0$ ,  $\hat{\theta} = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a} v^{2/\delta-2}$ , в системе (16) —  $\hat{\lambda} = \lambda_1/D_1 = \lambda_2/D_2$ ,  $v = \hat{\Psi}^{(1)}/\hat{\Psi}^{(2)}$ ,

$\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a} \frac{\partial v}{\partial x_a}$ ,  $\hat{f}_m$  и  $\hat{g}_m$  — произвольные функции.

Очевидно, что системы уравнений (15), (16) инвариантны относительно обобщенной алгебры Галилея  $AG_2(1, 3)$  (см. теорему 3).

3. А н з а ц ы и р е д у к ц и я у р а в н е н и й (6), (7). Нелинейные уравнения (6), (7) инвариантны относительно 13-мерной алгебры Ли  $AG_2(1, 3)$ . В работе [10] построена система всех несопряженных одномерных подалгебр алгебры  $AG_2(1, 3)$ . В качестве такой системы можно выбрать следующие 14 подалгебр:

$$\begin{aligned} X_1 = P_1, X_2 = J, X_3 = P_t + \alpha_0 J, X_4 = J_{12} + \alpha J, X_5 = J_{12} + G_3, X_6 = J_{12} - \\ - P_t + \alpha_0 J, X_7 = G_1 + P_2, X_8 = -P_t + G_1, X_9 = J_{12} + \beta G_3 - P_t, X_{10} = D + \\ + \alpha J, X_{11} = P_t + \Pi - \alpha J, X_{12} = J_{12} + \beta D + \alpha J, X_{13} = P_t + \Pi - \beta J_{12} - \\ - \alpha J, X_{14} = P_t + \Pi - J_{12} - \beta (G_1 + P_2), \end{aligned}$$

где  $\alpha_0 \in \mathbb{R}^1$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > 0$ .

Решая уравнения Лагранжа для каждого из операторов (17) [7], получаем инварианты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , зависящие от  $t$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , и анзацы для искомой функции  $\Psi$ . Исключение составляет только единичный оператор  $X_2$ , которому соответствуют четыре инварианта  $t$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и функциональное соотношение между  $\Psi$  и  $\bar{\Psi}$ . Новые инвариантные переменные и соответствующие анзацы приведены в табл. 1. Любой другой анзац, получаемый с помощью

произвольного элемента алгебры  $AG_2(1, 3)$ , преобразованиями инвариантности сводится к одному из тех, которые указаны в таблице.

Используя найденные инварианты и анзацы вида [7]  $\Psi = f(t, x) \varphi(\omega)$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , где  $f(t, x)$  — известная функция (см. табл. 1), проведем редукцию четырехмерных нелинейных уравнений (6), (7) к трехмерным ДУЧП. Ниже приведены редукционные уравнения для искомой функции  $\varphi$  (индексы  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  у функции  $\varphi$  обозначают дифференцирование по этим переменным):

$$X_1: i\varphi_t = k(\varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}) + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \omega_1 = t, \quad (18)$$

$$X_2: i\varphi_t = k\Delta\varphi + \lambda\gamma^{4/3}\varphi, \quad \varphi\dot{\varphi} = \gamma^2, \quad \gamma > 0, \quad (19)$$

$$X_3: k\Delta\varphi + \alpha_0\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad \omega_a = x_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (20)$$

Таблица 1

Под алгебры	Инвариантные переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$	Анзацы $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$
$X_1$	$t, x_2, x_3$	$\Psi(t, x) = \varphi(\omega)$
$X_2$	$t, x_1, x_2, x_3$	$\Psi(t, x) = \varphi(t, x), \Psi\dot{\Psi} = \gamma^2$
$X_3$	$x_1, x_2, x_3$	$\Psi = \exp(i\alpha_0 t) \varphi(\omega)$
$X_4$	$t, x_1^2 + x_2^2, x_3$	$\Psi = \exp\left(i\alpha \arctg \frac{x_2}{x_1}\right) \varphi(\omega)$
$X_5$	$t, x_1^2 + x_2^2, x_3 - t \arctg \frac{x_2}{x_1}$	$\Psi = \exp\left(-\frac{ix_3^2}{4kt}\right) \varphi(\omega)$
$X_6$	$t + \arctg \frac{x_2}{x_1}, x_1^2 + x_2^2, x_3$	$\Psi = \exp(-i\alpha_0 t) \varphi(\omega)$
$X_7$	$t, x_1 - tx_2, x_3$	$\Psi = \exp\left(-\frac{ix_1^2}{4kt}\right) \varphi(\omega)$
$X_8$	$2x_1 + t^2, x_2, x_3$	$\Psi = \exp\left[\frac{it}{2k}\left(x_1 + \frac{t^2}{3}\right)\right] \varphi(\omega)$
$X_9$	$t + \arctg \frac{x_2}{x_1}, x_1^2 + x_2^2, 2x_3 + \beta t^2$	$\Psi = \exp\left[\frac{i\beta t}{2k}\left(x_3 + \frac{\beta t^2}{3}\right)\right] \varphi(\omega)$
$X_{10}$	$\frac{x_1}{\sqrt{t}}, \frac{x_2}{\sqrt{t}}, \frac{x_3}{\sqrt{t}}$	$\Psi = t^{-\frac{3}{4}} + i\frac{\alpha}{4k} \varphi(\omega)$
$X_{11}$	$\frac{x_1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{1+t^2}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \exp\left[-\frac{i}{4k} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{ x ^2 t}{1+t^2} + 2\alpha \arctg t\right)\right] \varphi(\omega)$
$X_{12}$	$\ln t + 2\beta \arctg \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{t}, \frac{x_3}{\sqrt{t}}$	$\Psi = t^{-\frac{3}{4}} + i\frac{\alpha}{4k\beta} \varphi(\omega)$
$X_{13}$	$\beta \arctg t - \arctg \frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{t^2 + 1}, \frac{x_3}{\sqrt{t^2 + 1}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \exp\left[-\frac{i}{4k} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{ x ^2 t}{1+t^2} + 2\alpha \arctg t\right)\right] \varphi(\omega)$
$X_{14}$	$\frac{tx_1 + x_2}{t^2 + 1} + \beta \arctg t, \frac{tx_2 + x_1}{t^2 + 1}, \frac{x_3}{\sqrt{t^2 + 1}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \exp\left[-\frac{i}{4k} \left(\frac{ x ^2 t}{1+t^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\beta \arctg t \cdot \frac{tx_2 - x_1}{t^2 + 1}\right)\right] \varphi(\omega)$

$$X_4: i\varphi_t = k(4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2} + 4\varphi_{\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}) - \frac{k\alpha^2}{\omega_2}\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \omega_1 = t, \quad (21)$$

$$X_5: i\left(\varphi_t + \frac{\varphi}{2t} + \frac{\omega_3\varphi_{\omega_3}}{t}\right) = k\left(4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2} + \left(1 + \frac{t^2}{\omega_2}\right)\varphi_{\omega_3\omega_3}\right) + \lambda\varphi|\varphi|^{3/4}, \quad \omega_1 = t, \quad (22)$$

$$X_6: i\varphi_{\omega_1} = k\left(\frac{1}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1} + 4\varphi_{\omega_2} + 4\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}\right) - \alpha_0\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad (23)$$

$$X_7: i\left(\varphi_t + \frac{\varphi}{2t} + \frac{\omega_2\varphi_{\omega_2}}{t}\right) = k(1 + t^2)\varphi_{\omega_2\omega_2} + k\varphi_{\omega_3\omega_3} + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad t = \omega_1, \quad (24)$$

$$X_8: k(4\varphi_{\omega_1\omega_1} + \varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}) + \frac{\omega_1}{4k}\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad (25)$$

$$X_9: i\varphi_{\omega_1} = k\left[\frac{1}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1} + 4(\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_2}) + 4\varphi_{\omega_3\omega_3}\right] - \frac{\beta}{4k}\omega_3\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad (26)$$

$$X_{10}: k(\varphi_{\omega_1\omega_1} + \varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}) + \frac{i}{2}\omega_a\varphi_{\omega_a} + \left(i\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{4k}\right)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad (27)$$

$$X_{11}: k(\varphi_{\omega_1\omega_1} + \varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}) + (2\alpha - \omega_a\omega_a)\frac{\varphi}{4k} + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0, \quad (28)$$

$$X_{12}: -i\left(\frac{3}{4}\varphi + \omega_2\varphi_{\omega_2} - \varphi_{\omega_1}\right) = 4k(\omega_2\varphi_{\omega_2})_{\omega_2} + \frac{4\beta^2k}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1} + k\varphi_{\omega_3\omega_3} + \frac{\alpha}{4k\beta}\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad (29)$$

$$X_{13}: -i\beta\varphi_{\omega_1} = \frac{k}{\omega_2}\varphi_{\omega_1\omega_1} + 4k\varphi_{\omega_2} + 4k\omega_2\varphi_{\omega_2\omega_2} - (2\alpha + \omega_2^2 + \omega_3^2)\varphi/4k + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad (30)$$

$$X_{14}: i(\alpha\varphi_{\omega_1} + \omega_1\varphi_{\omega_2} - \omega_2\varphi_{\omega_1}) = \varphi_{\omega_1\omega_1} + \varphi_{\omega_2\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3} - \frac{1}{4k}(2\alpha\omega_2 + \omega_a\omega_a)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}. \quad (31)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Редукционные уравнения, соответствующие уравнению (7), отличаются от уравнений (18)—(31) только тем, что вместо нелинейности  $\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}$  они содержат нелинейные слагаемые, порожденные членом  $\lambda\Psi\frac{|\partial\Psi|}{\partial x_a}\frac{\partial|\Psi|}{\partial x_a}|\Psi|^{-2}$ .

Каждое из уравнений (18)—(31) последующей редукцией можно свести к ДУЧП от двух независимых переменных, а затем и к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). В результате такой последовательной редукции получаем, как правило, нелинейное ОДУ второго порядка вида

$$A(\omega)\partial^2\varphi/d\omega^2 + B(\omega)d\varphi/d\omega + C(\omega)\varphi + \lambda\varphi|\varphi|^{4/3} = 0,$$

где

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0, \\ A_0\omega, \\ A_0(\omega^2 + 1), \end{cases} \quad B(\omega) = \begin{cases} B_0 + iB_1\omega, \\ B_0 + iB_1, \\ (B_0 + iB_1)\omega, \end{cases} \quad C(\omega) = \begin{cases} C_0 + C_1\omega, \\ C_0 + iC_1, \\ C_0 + C_1\omega^2, \\ C_0 + C_1\omega, \end{cases}$$

$A_0, B_0, B_1, C_0, C_1$  — действительные постоянные или параметры. Конкретный вид функций  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$ ,  $C(\omega)$  и переменной  $\omega$  в каждом случае определяется соответствующим набором инвариантов  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  (см. табл. 1).

4. Ф о р м у л ы р а з м н о ж е н и я р е ш е н и й. Для построения таких формул воспользуемся преобразованиями инвариантности, генерируемыми базисными операторами (2) при  $n = 3$  алгебры  $AG_2(1, 3)$ . Прежде всего найдем преобразования, порождаемые операторами  $G_a$  (2с) и  $\Pi$  (2е). Решая соответствующие уравнения Ли, получаем преобразования Галилея

$$t' = t, \quad x'_a = x_a + \varepsilon_a t, \quad a = 1, 2, 3,$$

$$G_a: \Psi' = \Psi \exp\left(-\frac{i\varepsilon_a}{2k} \left(x_a + \frac{\varepsilon_a t}{2}\right)\right), \quad \varepsilon_a \in \mathbb{R}^1, \quad (32)$$

и проективные преобразования

$$\Pi: t' = \frac{t}{1-pt}, \quad x'_a = \frac{x_a}{1-pt}, \quad p \in \mathbb{R}^1, \quad (33)$$

$$\Psi' = \Psi (1-pt)^{3/2} \exp\left(-\frac{ip|x|^2}{4k(1-pt)}\right), \quad a = 1, 2, 3.$$

Пусть  $W(t, x)$  — решение уравнения (6) или (7). Применяя к нему преобразования (32), получаем новое решение (штрихи ниже опускаем)

$$\Psi = W(t, x + \varepsilon t) \exp\left(\frac{i}{2k} \left(\varepsilon x + \frac{|\varepsilon|^2 t}{2}\right)\right), \quad (34)$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ,  $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_a \varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_a \in \mathbb{R}^1$ . После применения к решению (34) преобразований (33), находим четырехпараметрическое семейство решений

$$\Psi = W\left(\frac{t}{1-pt}, \frac{x + \varepsilon t}{1-pt}\right) \exp\left[i \frac{p|x|^2 + 2\varepsilon x + |\varepsilon|^2 t}{4k(1-pt)}\right] (1-pt)^{-3/2}. \quad (35)$$

Нетрудно убедиться, что повторное применение формул (32), (33) к решению (35) приводит к этому же семейству решений, т. е. оно неразмножаемо относительно галилеевских и проективных преобразований.

Выражение (35) естественно назвать формулой размножения решений уравнений (6), (7), построенной по операторам  $G_a$  (2с) и  $\Pi$  (2е). Обобщим эту формулу, прицелив остальные преобразования группы  $G_2(1, 3)$  — сдвиги по переменным  $t, x$ , вращения в пространстве  $R^3$ , растяжения (сжатия) по переменным  $t, x$ ,  $\Psi$  и вращения компонент  $\operatorname{Re} \Psi$  и  $\operatorname{Im} \Psi$  (см. оператор  $J$  (2с)). Совокупность этих преобразований задается формулами

$$t' = m^2 t + d_0^1, \quad x' = mAx + d^1, \quad \Psi' = e^{-i\alpha} m^{-3/2} \Psi, \quad (36)$$

где  $m > 0$ ,  $d_0^1, d^1 = (d_1^1, d_2^1, d_3^1)$ ,  $\alpha$  — действительные параметры,  $A = (c_{ab})_{a,b=1}^3$  — действительная матрица вращений.

Воспользовавшись группой преобразований (36) из (35) получаем 13-параметрическое семейство решений

$$\Psi = e^{i\alpha} \frac{m^{3/2}}{(d_0 - pm^2 t)^{3/2}} \exp\left[i \left( \frac{pm^2 |x|^2 + 2m\varepsilon' x}{4k(d_0 - pm^2 t)} + \frac{m^2 |\varepsilon|^2 t + b_0}{4k(d_0 - pm^2 t)} \right)\right] W\left(\frac{m^2 t + d_0^1}{d_0 - pm^2 t}, \frac{mAx + m^2 \varepsilon t + d}{d_0 - pm^2 t}\right), \quad (37)$$

где  $d_0 = 1 - pd_0^1$ ,  $d = d^1 + \varepsilon d_0^1$ ,  $\varepsilon^1 = \varepsilon A + pd^1 A$ ,  $b_0 = p|d^1|^2 + 2\varepsilon d^1 + |\varepsilon|^2 d_0^1$ ,  $|d^1|^2 = d_a^1 d_a^1$ ,  $a = 1, 2, 3$ .

Таким образом, если  $W(t, x)$  — решение нелинейного уравнения (6) или (7), то формула (37) определяет неразмножаемое семейство решений этого же уравнения.

Если в формуле (37) выбрать параметры  $d_0 = 1/p$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = 0$  ( $A = E$  — единичная матрица) и сделать предельный переход при  $p \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow 0$ ,  $pm \rightarrow -1$ , то получим решение уравнения (6) или (7):

$$\Psi(t, x) = t^{-3/2} \exp\left(-\frac{i|x|^2}{4kt}\right) \mathcal{W}\left(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right). \quad (38)$$

**З а м е ч а н и е 2.** Построенные формулы размножения решений позволяют получать из действительных стационарных решений уравнений (6), (7) комплексные нестационарные решения. Они справедливы для любого уравнения вида (5).

Т а б л и ц а 2

№ п/п	Инвариантные переменные	Дизъюнкты
	$\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3$	$\hat{\omega} = (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3)$
1	$t, C^{(2)}, C^{(3)}x$	$\Psi(t, x) = \Phi(\hat{\omega})$
2	$t, C^{(1)}x, C^{(2)}x, C^{(3)}x$	$\Psi = \Phi(t, C^{(1)}x, C^{(2)}x, C^{(3)}x), \Phi\Phi^* = \Psi^2$
3	$C^{(1)}x, C^{(2)}x, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp(i\alpha_0 t) \Phi(\hat{\omega})$
4	$t,  x ^2, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp\left(i\alpha \operatorname{arctg} \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}\right) \Phi(\hat{\omega})$
5	$t,  x ^2 - (C^{(3)}x)^2, C^{(3)}x - t \operatorname{arctg} \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}$	$\Psi = \exp\left(-\frac{i(C^{(3)}x)^2}{4kt}\right) \Phi(\hat{\omega})$
6	$t + \operatorname{arctg} \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x},  x ^2, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp(-i\alpha_0 t) \Phi(\hat{\omega})$
7	$t, C^{(1)}x - C^{(2)}xt, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp\left(-\frac{i(C^{(1)}x)^2}{4kt}\right) \Phi(\hat{\omega})$
8	$2C^{(1)}x + t^2, C^{(2)}x, C^{(3)}x$	$\Psi = \exp\left[\frac{it}{2k} \left(C^{(1)}x + \frac{t^2}{3}\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$
9	$t + \operatorname{arctg} \frac{C^{(2)}x}{C^{(1)}x}, (C^{(1)}x)^2 + (C^{(2)}x)^2, 2C^{(3)}x + \beta t^2$	$\Psi = \exp\left[\frac{i\beta t}{2k} \left(C^{(3)}x + \frac{\beta t^2}{3}\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$
10	$\frac{C^{(1)}x}{\sqrt{t}}, \frac{C^{(2)}x}{\sqrt{t}}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{t}}$	$\Psi = t^{-\frac{3}{4} + i\frac{\alpha}{4k}} \Phi(\hat{\omega})$
11	$\frac{C^{(1)}x}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{C^{(2)}x}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \exp\left[-\frac{i}{4k} \left(\frac{ x ^2 t}{1+t^2} + 2\alpha \operatorname{arctg} t\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$
12	$\ln t + 2\beta \operatorname{arctg} \frac{C^{(1)}x}{C^{(2)}x}, \frac{ x ^2}{t}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{t}}$	$\Psi = t^{-\frac{3}{4} + \frac{i\alpha}{4k\beta}} \Phi(\hat{\omega})$
13	$\beta \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} \frac{C^{(1)}x}{C^{(2)}x}, \frac{ x ^2}{1+t^2}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \exp\left[-\frac{i}{4k} \left(\frac{ x ^2}{1+t^2} + 2\alpha \operatorname{arctg} t\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$
14	$\frac{tC^{(1)}x + C^{(2)}x}{1+t^2} + \beta \operatorname{arctg} t, \frac{tC^{(2)}x - C^{(1)}x}{1+t^2}, \frac{C^{(3)}x}{\sqrt{1+t^2}}$	$\Psi = (t^2 + 1)^{-3/4} \exp\left[-\frac{i}{4k} \left(\frac{t x ^2}{1+t^2} + 2\beta \operatorname{arctg} t \cdot \frac{tC^{(2)}x - C^{(1)}x}{t^2 + 1}\right)\right] \Phi(\hat{\omega})$



В заключение рассмотрим частный случай формулы (37)

$$\Psi = W(t, Ax) = W(t, C^{(1)}x, C^{(2)}x, C^{(3)}x), \quad (39)$$

где  $C^{(a)}x = c_{ab}x_b$ ,  $a, b = 1, 2, 3$ ,  $C^{(a)} = (c_{a1}, c_{a2}, c_{a3})$  — векторы-строки матрицы вращений  $A$ .

Формула размножения решений (39) позволяет симметризовать по  $x_1, x_2, x_3$  инвариантные переменные и анзацы из табл. 1. Результаты такой симметризации приведены в табл. 2. Отметим, что векторы  $C^{(a)}$ ,  $a = 1, 2, 3$ , которые фигурируют в табл. 2, являются ортонормированными, т. е.

$$C^{(a)}C^{(b)} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases} \quad a, b = 1, 2, 3.$$

1. *Niederer U.* The maximal kinematical invariance group of the free Schrodinger equation // *Hely. phys. acta.*— 1972.— 45, N 5.— P. 808—816.
2. *Fushchich W. I., Nikitin A. G.* Symmetries of Maxwell's Equations.— Dordrecht: D. Reidel Publ. Comp., 1987.— 214 p.
3. *Фуцич В. И.* О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 4—23.
4. *Fushchich W. I., Cherniha R. M.* The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // *J. Phys. A: Math. and Gen.*— 1985.— 18, N 18.— P. 3491—3503.
5. *Fushchich W. I., Serov N. I.* On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrodinger equation // *Ibid.*— 1987.— 20.— L 929—L933.
6. *Хаген Г.* Синергетика.— М.: Мир, 1980.— 408 с.
7. *Фуцич В. И.* Симметрия в задачах математической физики /// Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—28.
8. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 400 с.
9. *Фуцич В. И., Чернига Р. М.* О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа.— Киев, 1986, — 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.85).
10. *Баранник Л. Ф., Фуцич В. И.* О непрерывных подгруппах обобщенных групп Шредингера.— Киев, 1987.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.16).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.03.89