УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, В. Э. Горецкий

О группах со слабыми условиями минимальности и максимальности для подгрупп, не являющихся нормальными

В теории групп очень часто приходится изучать группы, в каком-то смысле насыщенные v-подгруппами для некоторого теоретико-группового свойства v (например, группы, в которых свойством v обладают все конечно порожденные подгруппы, все бесконечные подгруппы, все абелевы подгруппы и т. п.). Рассматривая группы, не удовлетворяющие Min (соответственно Max), но удовлетворяющие условию минимальности (максимальности) для подгрупп, не обладающих свойством v, получаем один из подходов к такого рода задачам. Он впервые был предложен С. Н. Черниковым в [1, 2]. В частности, в [1] изучены группы с условием минимальности для неинвариантных подгрупп — с условием $\mathrm{Min} - \overline{n}$. Локально почти разрешимые группы с условием $\mathrm{Max} - \overline{n}$ описаны в [3]. Заменяя условие минимальности (максимальности) слабым условием минимальности (максимальности), еще более расширяем изученный класс групп (слабые условия минимальности и максимальности введены в рассмотрение Д. И. Зайцевым [4] и Р. Бэром [5]). Поступая таким образом, Н. С. Черников в [6] изучил локально конечные группы с условием $\mathrm{Min} - \infty$ для недополняемых абелевых подгрупп. В настоящей работе изучаются локально почти разрешимые группы с условием $\mathrm{Min} - \infty$ и $\mathrm{Max} - \infty$ для подгрупп, не являющихся нормальными или, короче, с условием $\mathrm{Min} - \infty - \overline{n}$ и $\mathrm{Max} - \infty - \overline{n}$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Локально почти разрешимая группа тогда и только тогда удовлетворяет условию* $\mathrm{Min} - \infty - \overline{n}$ *(соответственно* $\mathrm{Max} - \infty - \overline{n}$*), когда она либо дедекиндова, либо почти разрешима и минимаксна.*

Таким образом, как и для условия $\mathrm{Min}-\bar{n}$, класс локально почти разрешимых групп с условием $\mathrm{Min}-\infty-\bar{n}$ является простым объединением класса дедекиндовых групп и групп с условием $\mathrm{Min}-\infty$.

Говорят, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для v-подгрупп (условию $\mathrm{Min}-\infty-\bar{n}$), если не существует строго убывающей цепочки v-подгрупп $H_1 > H_2 > \ldots > H_n > \ldots$, для которой все индексы $|H_n : H_{n+1}|$ бесконечны. Двойственным образом определяется слабое условие максимальности для v-подгрупп (условие $\mathrm{Max}-\infty-\bar{n}$).

Доказательство теоремы составляют следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть группа G удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty-\bar{n}$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty-\bar{n}$). Если G содержит такие подгруппы A и K, что $K \lhd A$ и $A/K = \underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{X}} \bar{A}_\lambda$, где $\bar{A}_\lambda$ неединична при любом $\lambda \in \Lambda$ и множество Λ бесконечно, то $K \lhd G$ и фактор-группа G/K дедекиндова.*

Доказательство. Обозначим через A_λ полный прообраз в G подгрупп $\bar{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Пусть μ — произвольный элемент Λ, Λ_1 и Λ_2 — такие бесконечные подмножества Λ, что $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ и $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \{\mu\}$. Из бесконечности подмножества Λ_i следует, что в нем существует бесконечная убывающая (соответственно возрастающая) последовательность подмножеств Λ_{in}, $n \in N$, со следующими свойствами: $\Lambda_{in} \setminus \Lambda_{in+1}$ (соответственно $\Lambda_{in+1} \setminus \Lambda_{in}$) бесконечно и $\mu \in \Lambda_{in}$ для всех $n \in N$, $i = 1, 2$. Положим $\bar{B}_{in} = \underset{\lambda\in\Lambda_{in}}{\mathrm{X}} \bar{A}_\lambda$ и пусть B_{in} — полный прообраз в G подгруппы $\bar{B}_{in}$, $n \in N$, $i = 1, 2$. Тогда $B_{in} > B_{in+1}$ (соответственно $B_{in} < B_{in+1}$) и индексы $|B_{in} : B_{in+1}|$ (соответственно $|B_{in+1} : B_{in}|$) бесконечны, $n \in N$, $i = 1, 2$. Так как G удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty-\bar{n}$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty-\bar{n}$), то найдутся такие номера t, s, что $B_{1t}, B_{2s} \lhd G$. Из их выбора следует, что $B_{1t} \cap B_{2s} = A_\mu$, т. е. $A_\mu \lhd G$ при любом $\mu \in \Lambda$. Если $\lambda \neq \mu$, то $A_\lambda \cap A_\mu = K$, поэтому и подгруппа K нормальна в G.

Рассмотрим фактор-группу $H = G/K$ и пусть $x_1 \in H$. Очевидно существует такое подмножество $\Delta \subseteq \Lambda$, что $\langle x_1\rangle \cap \underset{\lambda\in\Delta}{\mathrm{X}} \bar{A}_\lambda = \langle 1\rangle$ и $\Lambda \setminus \Delta$ конечно. В частности, Δ бесконечно. Пусть $\Delta_1 = \{1\} \cup \Delta$ и $\bar{A}_1 = \langle x_1\rangle$, $\bar{C} = \underset{\lambda\in\Delta_1}{\mathrm{X}} \bar{A}_\lambda$. Из доказанного выше следует, что $\bar{A}_\lambda \lhd H$ при любом $\lambda \in \Delta_1$, в частности, $\langle x_1\rangle \lhd H$. Так как x_1 — произвольный элемент H, то отсюда следует, что в группе H нормальна всякая подгруппа, т. е. H дедекиндова. Лемма доказана.

Группу G назовем обобщенно радикальной, если она обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп, бесконечные факторы которого локально нильпотентны (в работе Б. И. Плоткина [7] такие группы названы WF-группами).

Следствие. *Если обобщенно радикальная группа G удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty-\bar{n}$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty-\bar{n}$), то она либо дедекиндова, либо почти разрешима и минимаксна.*

Доказательство. Если обобщенно радикальная группа G, удовлетворяющая условию $\mathrm{Min}-\infty-\bar{n}$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty-\bar{n}$), содержит абелеву не минимаксную подгруппу A, то она дедекиндова. Действительно, когда ранг A бесконечен, то A включает в себя подгруппу, разложимую в прямое произведение бесконечного множества неединичных циклических подгрупп. Из леммы 1 тогда следует, что G дедекиндова. Поэтому можно считать ранг A конечным. Если множество $\pi(A)$ бесконечно, то снова из леммы 1 вытекает, что G дедекиндова. Так что рассмотрим случай конечного множества $\pi(A)$.

Тогда A включает в себя такую свободную абелеву подгруппу C конечного ранга, что A/C — периодическая и $\pi(A/B)$ бесконечно. Пусть $n \geqslant 3$ и $B = C^{2^n}$. Тогда фактор-группа A/B периодическая, $\pi(A/B)$ бесконечно и A/B содержит элемент порядка 8. Из леммы 1 следует, что $B \lhd G$ и G/B

дедекиндова. Если предположить, что G/B неабелева, то G/B — прямое произведение группы кватернионов, элементарной абелевой 2-группы и периодической $2'$-группы (см., например, [8], теорема 5. 3. 7). В частности, G/B не содержит элементов порядка 8. Это означает, что G/B абелева. По этой же причине абелевой будет и фактор-группа G/B^{2^k} для всех $k \in N$. Так как B свободная абелева, то $\bigcap_{k \in N} B^{2^k} = \langle 1 \rangle$, поэтому $G \leqslant \prod_{k \in N} G/B^{2^k}$, в частности, G абелева. Итак, остается рассмотреть случай, когда все абелевы подгруппы G минимаксны. Пусть L — такая нормальная радикальная подгруппа G, что G/L не включает в себя неединичных локально нильпотентных нормальных подгрупп. Фактор-группа $H = G/L$ обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп $\langle 1 \rangle = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots H_\alpha \leqslant H_{\alpha+1} \leqslant \ldots H_\gamma = H$, факторы которого либо локально нильпотентны, либо конечные полупростые группы. Предположим, что H бесконечна. Пусть n — наименьшее натуральное число, для которого H_{n+1}/H_n — бесконечная локально нильпотентная группа. Подгруппа H_n конечна, а потому $|G : C_H(H_n)| < \infty$. Положим $K = H_{n+1} \cap C_H(H_n)$. Подгруппа K бесконечна, подгруппа H_n конечна и полупроста, так что $H_{n+1} \cap C_H(H_{n+1}) = \langle 1 \rangle$. Из изоморфизмов $K \cong K/K \cap H_n \cong KH_n/H_n \leqslant H_{n+1}/H_n$ следует, что K локально нильпотентна. Но это противоречит выбору H. Это противоречие доказывает конечность H_n при всех $n \in N$.

Имеем $H_1 \cap C_H(H_1) = \langle 1 \rangle$; положим $F_1 = H_1$. Подгруппа $C_H(F_1)$ включает в себя, ввиду доказанного выше, конечную H-допустимую подгруппу $F_2 \neq \langle 1 \rangle$. Так как F_1F_2 конечна и полупроста, то $F_1F_2 \cap C_H(F_1F_2) = \langle 1 \rangle$. Подгруппа $C_H(F_1F_2)$ имеет в H конечный индекс, а потому снова включает в себя конечную неединичную H-допустимую подгруппу F_3. Аналогичные рассуждения позволяют построить такое семейство нормальных в H неединичных подгрупп $F_n, n \in N$, что $\langle F_n \mid n \in N \rangle = \mathop{\mathrm{X}}_{n \in N} F_n$. Из леммы 1 следует, что G/L дедекиндова, в частности, нильпотентна. Полученное противоречие доказывает конечность G/L. Подгруппа L радикальна и ее абелевы подгруппы минимаксны. Из теоремы Бэра—Зайцева (см. [5, 9]) следует, что L, а вместе с ней и вся группа G, минимаксна. Следствие доказано.

Лемма 2. *Пусть H — бесконечная локально почти разрешимая подгруппа G. Если всякая бесконечная подгруппа H является G-допустимой, то H разрешима ступени $\leqslant 3$.*

Доказательство. Если H содержит элемент a бесконечного порядка, то $\langle a \rangle \lhd G$. Пусть $C = C_G(\langle a \rangle) \cap H$, $x \in C$ и $|x|$ конечен. Подгруппа $\langle x, a \rangle$ абелева и бесконечна, а потому G-допустима. Но $\langle x \rangle$ — периодическая часть $\langle x, a \rangle$, так что $\langle x \rangle \lhd G$. Отсюда следует, что всякая подгруппа C является G-допустимой. В частности, C-дедекиндова. Но $|H : C| \leqslant 2$, отсюда следует, что H разрешима ступени $\leqslant 3$.

Предположим теперь, что H периодическая. Тогда H локально конечна. Если H не удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то H включает в себя подгруппу $A = \mathop{\mathrm{X}}_{\lambda \in \Lambda} \langle a_\lambda \rangle$, $a_\lambda \neq 1$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — бесконечно. Если $h \in H$, то найдется такое подмножество $\Delta \subseteq \Lambda$, что $\langle 1 \rangle = \langle h \rangle \cap \mathop{\mathrm{X}}_{\lambda \in \Delta} \langle a_\lambda \rangle$ и $\Lambda \setminus \Delta$ конечно. В частности, Δ бесконечно. Пусть Δ_1, Δ_2 — такие бесконечные подмножества Δ, что $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ и $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$. Подгруппы $A_1 = \mathop{\mathrm{X}}_{\lambda \in \Delta_1} \langle a_\lambda \rangle$ и $A_2 = \mathop{\mathrm{X}}_{\lambda \in \Delta_2} \langle a_\lambda \rangle$ бесконечны, потому G-допустимы. По этой же причине G-допустимыми будут $\langle h \rangle A_1$ и $\langle h \rangle A_2$. Но тогда $\langle h \rangle = \langle h \rangle \times A_1 \cap \langle h \rangle A_2$ также G-допустима. Итак, снова H дедекиндова.

Наконец, пусть H удовлетворяет Min для абелевых подгрупп. По теореме В. П. Шункова [10] подгруппа H черниковская. Обозначим через K ее делимую часть; K бесконечна, а потому G-допустима. Всякая подгруппа H, включающая K, бесконечна, т. е. G-допустима. В частности, H/K дедекиндова, так что снова H разрешима ступени $\leqslant 3$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если G — локально почти разрешимая группа с условием $\mathrm{Min} - \infty - \bar{n}$ (соответственно $\mathrm{Max} - \infty - \bar{n}$), то G — обобщенно радикальная группа.*

Доказательство. Предположим сначала, что G удовлетворяет $\mathrm{Min}-\infty-\overline{n}$. Если G удовлетворяет $\mathrm{Min}-\infty$, то G почти разрешима и минимаксна [11]. Поэтому рассмотрим случай, когда G не удовлетворяет $\mathrm{Min}-\infty$. Пусть $H_1 > H_2 > \ldots > H_n > \ldots$ — убывающая последовательность подгрупп, для которой индексы $|H_n : H_{n+1}|$ бесконечны при всех $n \in N$. Но тогда найдется такой номер t, что $H_n \lhd G$ для $n \geqslant t$. Пусть $g \in G$. Если $\langle g\rangle \cap H_{t+k} = \langle 1\rangle$ для некоторого k, то $\langle g\rangle \cap H_{t+k+n} = \langle 1\rangle$ для всех $n \in N$. Поэтому индексы $|H_{t+k+n}\langle g\rangle : H_{t+k+n+1}\langle g\rangle|$ бесконечны при любом $n \in N$. Рассмотрим случай, когда $\langle g\rangle \cap H_{t+k} \neq \langle 1\rangle$ для всех $n \in N$. Но тогда фактор-группа $\langle g\rangle H_{t+k}/H_{t+k}$ конечная, а потому индекс $|H_{t+k-1}\langle g\rangle : H_{t+k}\times \langle g\rangle$ бесконечен. Итак, в любом случае найдется такой номер l, что $\langle g\rangle H_n \lhd G$ при всех $n \geqslant l$. Пусть $H = \bigcap_{n\geqslant l} H_n$, $L = \bigcap_{n\geqslant l}\langle g\rangle H_n$. Имеем $LH_n = \langle g\rangle H_n$, так что $LH_n/H_n = \langle g\rangle H_n/H_n \cong \langle g\rangle/\langle g\rangle \cap H_n$, в частности, LH_n/H_n абелевы при любом $n \geqslant l$. Из вложения $L/H \leqslant \prod_{n\geqslant l} LH_n/H_n$ получаем, что L/H абелева. Далее $gH \in L/H$, а потому, если $g \notin H$, то L/H неединична. Итак, фактор-группа G/H включает в себя нормальную абелеву неединичную подгруппу L/H. Если L/H не минимаксна, то, рассуждая как в следствии леммы 1, покажем, что G/H дедекиндова. Рассмотрим теперь случай, когда $\overline{L} = L/H$ минимаксна. Положим $\overline{H}_n = H_n/H$. Найдется такое число $s \geqslant l$, что $\overline{L} \cap \overline{H}_n/\overline{L} \cap \overline{H}_{n+1}$ конечна при любом $n \geqslant s$. Имеем $\overline{L}\overline{H}_n/\overline{L}\overline{H}_{n+1} \cong \overline{H}_n/\overline{H}_{n+1}\overline{L} \cap \overline{H}_n = \overline{H}_n/\overline{H}_{n+1}(\overline{L} \cap \overline{H}_n)$ и $(\overline{L} \cap \overline{H}_n)\overline{H}_{n+1}/\overline{H}_{n+1} \cong \overline{L} \cap \overline{H}_n/\overline{L} \cap \overline{H}_{n+1}$, поэтому из бесконечности индекса $|\overline{H}_n : \overline{H}_{n+1}|$ и конечности $\overline{L} \cap \overline{H}_n/\overline{L} \cap \overline{H}_{n+1}$ получаем бесконечность $|\overline{L}\overline{H}_n : \overline{L}\overline{H}_{n+1}|$ при $n \geqslant s$. Повторяя теперь для последовательности $\{LH_n \mid n \geqslant s\}$ приведенные выше рассуждения, приходим к существованию нормальной подгруппы $L_1 > L$, для которой $L_1 > L$ абелева. Если L_1/L не минимаксна, то G/L дедекиндова; ввиду следствия леммы 1 G/H — дедекиндова. Поэтому предположим, что L_1/L минимаксна. Рассуждая аналогично, построим возрастающую последовательность $L < L_1 < \ldots L_\alpha < L_{\alpha+1} < \ldots L_\gamma \leqslant G$ таких нормальных подгрупп, что L_α/H разрешима и минимаксна, $\alpha < \gamma$ и G/L_γ почти разрешима и минимаксна Из следствия леммы 1 получаем, что G/H дедекиндова. Положим $B = [[G, G], G]$. Если предположить, что B не удовлетворяет $\mathrm{Min}-\infty$, то, используя приведенные выше рассуждения, придем к существованию такой G-допустимой подгруппы $B_1 < B$, что G/B_1 дедекиндова. Но это противоречит выбору B. Итак, B удовлетворяет $\mathrm{Min}-\infty$, а значит почти разрешима и минимаксна [11].

Пусть теперь G удовлетворяет условию $\mathrm{Max}-\infty-\overline{n}$. Если G удовлетворяет $\mathrm{Max}-\infty$, то G почти разрешима и минимаксна [11]. Поэтому будем считать, что в G существует возрастающая последовательность подгрупп $K_1 < K_2 < \ldots < K_n < \ldots$, для которой индексы $|K_{n+1} : K_n|$ бесконечны при любом $n \in N$. Поскольку G удовлетворяет $\mathrm{Max}-\infty-\overline{n}$, то найдется такой номер q, что $K_n \lhd G$ при $n \geqslant q$ Более того, найдется такой номер $r > q$, что всякая бесконечная подгруппа K_{n+1}/K является G-допустимой при $n \geqslant r$. Из леммы 2 получаем разрешимость K_{n+1}/K_r для $n \geqslant r$. Положим $K = \bigcup_{n\in N} K_n$. Тогда K/K_r — гиперабелева группа, не удовлетворяющая $\mathrm{Max}-\infty$, и из следствия леммы 1 получаем, что K/K_r — дедекиндова. Отсюда нетрудно получить, что и G/K_r дедекиндова. Положим $B = [[G, G], G]$. Как и для случая $\mathrm{Min}-\infty-\overline{n}$, можно показать, что B удовлетворяет $\mathrm{Max}-\infty$, т. е. B почти разрешима и минимаксна. Лемма доказана.

1. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных подгрупп // Мат. заметки.— 1969.— **6**.— С. 11—16.
2. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп // Докл. АН СССР.— 1969.— **184**.— С. 786—789.
3. *Кузенный Н. Ф., Курдаченко Л. А., Семко Н. Н.* Группы, насыщенные почти нормаль-

ными подгруппами // XVIII Всесоюз. алгебр. конф.: Тез сообщ.— Кишенев, 1985.— Ч. 1.— С. 292.
4. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн.— 1968.— **20**, № 4.— С. 472—482.
5. *Baer R.* Poliminimaxgruppen // Math. Ann.— 1968.— **175**, H. 1.— S. 1—13.
6. *Черников Н. С.* ωA-факторизуемые группы // Некоторые вопросы теории групп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1975.— С. 100—122.
7. *Плоткин Б. И.* Радикальные и полупростые группы // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1957.— **6**.— С. 299—366.
8. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups.— New York: Springer, 1982.
9. *Зайцев Д. И.* О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности // Мат. сб.— 1969.— **78**, № 3.— С. 323—331.
10. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.— 1970.— **9**, № 5.— С. 579—615.
11. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 652—660.

Хмельниц. техн. ин-т быт. обслуж, Получено 23.12,87