УДК 517.977.1+517.983.24

До Конг Хань

О структурной каскадной декомпозиции линейных стационарных систем, связанной с декомпозицией Калмана

Рассматривается структура каскадной декомпозиции линейных стационарных систем. Показано, что каждая система с гильбертовыми пространствами состояний, входных и выходных данных представима в виде каскадного соединения управляемой и вполне неуправляемой (или вполне ненаблюдаемой и наблюдаемой) систем. Рассмотрена также связь между различными декомпозициями, отвечающими одному и тому же инвариантному подпространству.

Розглядається структура каскадної декомпозиції лінійних стаціонарних систем. Показано, що кожна система з гільбертовими просторами станів, вхідних та вихідних даних може бути представлена у вигляді каскадного сполучення керованої та цілком некерованої (або цілком неспостережуваної і спостережуваної) систем. Розглянутий також зв'язок між різними декомпозиціями, відповідними одному і тому ж інваріантному підпростору.

Известно, что каждая линейная динамическая система допускает, согласно теореме Калмана, некоторую декомпозицию [1]. Но эта декомпозиция, вообще говоря, не является каскадной, которая играет большую роль в теории реализации линейных систем [2—4]. Изучим некоторые структуры каскадной декомпозиции, связанной с декомпозицией Калмана.

1. Введем необходимые понятия. Рассмотрим линейную стационарную систему $\alpha = (X, U, V; A, B, C, D)$, состоящую из трех гильбертовых пространств: пространства состояний X, пространства входов U и пространства выходов V, а также из четырех линейных ограниченных операторов $A : X \to X$, $B : U \to X$, $C : X \to V$, $D : U \to V$.

Подпространство $H_c = \overline{\bigvee_{n=0}^{\infty} A^n BU}$ (замыкание линейной оболочки векторов $A^n Bu$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $u \in U$) называется подпространством управляемости, а $H_0 = \bigvee_{n=0}^{\infty} A^{*n} C^* V$ — подпространством наблюдаемости системы α. Если $H = H_c$ (соответственно $H = H_0$), то система α называется управляемой (соответственно наблюдаемой).

Пусть $\alpha_k = (X_k, U_k, V_k; A_k, B_k, C_k, D_k)$, $k = 1, 2$, — такие системы, что пространство выходов системы α_1 совпадает с пространством входов системы α_2. Полагая

$$X = X_1 \oplus X_2, \quad U = U_1, \quad V = V_2, \quad A = A_1 P_1 + A_2 P_2 + B_2 C_1 P_1,$$
$$B = B_1 + B_2 D_1, \quad C = D_2 C_1 P_1 + C_2 P_2, \quad D = D_2 D_1,$$

получаем систему $\alpha = (X, U, V; A, B, C, D)$, которая называется каскадной композицией систем α_1, α_2 и обозначается $\alpha = \alpha_2 \alpha_1$ [3]. Мы говорим при этом, что система α допускает каскадную декомпозицию $\alpha = \alpha_2 \alpha_1$.

Определение 1. *Систему $\alpha_0 = (X_0, U_0, V_0; A_0, B_0, C_0, D_0)$ будем называть проекцией системы $\alpha = (X, U, V; A, B, C, D)$ на подпространство X_0, если*

$$X_0 \subset X, \quad U_0 = U, \quad V_0 = V,$$
$$A_0 = P_0 A|_{X_0}, \quad B_0 = P_0 B, \quad C_0 = C|_{X_0}, \quad D_0 = D,$$

где P_0 — ортопроектор из X на X_0. Обозначим $\alpha_0 = \mathrm{Pr}_{X_0} \alpha$.

Определение 2 [5]. *Система* $\tilde{\alpha} = (\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{V}; \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ *называется расширением системы* $\alpha = (X, U, V; A, B, C, D)$, *если*

$$\tilde{X} = X, \quad U \subset \tilde{U}, \quad V \subset \tilde{V}, \quad A = \tilde{A}, \quad B = \tilde{B}|_U, \quad C = P_V\tilde{C}, \quad D = P_V\tilde{D}|_U,$$

при этом система α *называется частью системы* $\tilde{\alpha}$.

2. Очевидно, что если система α допускает каскадную декомпозицию $\alpha = \alpha_2\alpha_1$, то пространство состояний X_2 системы α_2 является инвариантным подпространством основного оператора A системы α. Обратно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* X_2 — *инвариантное подпространство основного оператора* A. *Тогда система* α *допускает каскадную декомпозицию* $\alpha = \alpha_2\alpha_1$, *где* X_2 — *пространство состояний системы* α_2, $X_1 = X \ominus X_2$ — *пространство состояний системы* α_1. *Более того, можно выбрать декомпозицию* $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ *так, чтобы* α_1 *была расширением проекции* $\mathrm{Pr}_{X_1}\alpha$, *а* α_2 *была расширением проекции* $\mathrm{Pr}_{X_2}\alpha$.

Доказательство просто следует из следующей конструкции:

$$\alpha_1 : X_1, \quad U_1 = U, \quad V_1 = U \oplus V \oplus X_2, \quad A_1 = P_1A|_{X_1}, \quad B_1 = P_1B,$$

$$C_1x_1 = (0, Cx_1, P_2Ax_1), \quad D_1u = (0, Du, P_2Bu),$$

$$\alpha_2 : X_2, \quad U_2 = U \oplus V \oplus X_2, \quad V_2 = V, \quad A_2 = A|_{X_2}, \quad B_2(u, v, x_2) = P_2Bu + x_2,$$

$$C_2 = C|_{X_2}, \quad D_2(u, v, x_2) = Du + v.$$

Замечание. Близкие конструкции рассмотрены в [6, 7], но там эти конструкции не обладают последним свойством теоремы.

Очевидно, что по заданному инвариантному подпространству X_2 можно построить бесчисленные декомпозиции. Говорят, что эти декомпозиции отвечают инвариантному подпространству X_2. Связь между этими декомпозициями содержится в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть система* α *допускает некоторую каскадную декомпозицию* $\alpha = \alpha_2\alpha_1$.

1. *Если существует тривиальная система* α_0 *вида*

$$\alpha_0 = (0, U_0, V_0; 0, 0, 0, D_0) \tag{1}$$

с ограниченно обратимым оператором D_0 *и имеются системы* α_1', α_2' *такие, что*

$$\alpha_1 = \alpha_0\alpha_1', \quad \alpha_2' = \alpha_2\alpha_0, \tag{2}$$

то $\alpha = \alpha_2'\alpha_1'$.

2. *Обратно, если система* α *обладает еще каскадной декомпозицией* $\alpha = \alpha_2'\alpha_1'$ *и выполнены следующие условия:*

$$\ker B_2 \cap \ker D_2 = \{0\}, \quad \ker C_1'^{*} \cap \ker D_1'^{*} = \{0\}, \tag{3}$$

$$\ker B_2' \cap \ker D_2' = \{0\}, \quad \ker C_1^{*} \cap \ker D_1^{*} = \{0\}, \tag{4}$$

то существует тривиальная система α_0 *вида* (1) *с ограниченно обратимым оператором* D_0 *такая, что имеют место соотношения* (2).

Доказательство. Утверждение 1 следует непосредственно из определения каскадной композиции.

Докажем утверждение 2. Из (1), (2) очевидно нужно выбрать $U_0 = V_1' = U_2'$, $V_0 = V_1 = U_2$ и оператор $D_0 : U_0 \to V_0$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$D_2' = D_2D_0, \quad B_2' = B_2D_0, \quad C_1 = D_0C_1', \quad D_1 = D_0D_1'. \tag{5}$$

Определим оператор D_0 следующим образом: сначала на линейной оболочке векторов $C_1'x$, $D_1'u$:

$$D_0(C_1'x + D_1'u) = C_1x + D_1u, \quad x \in X_1, \quad u \in U_1.$$

Проверим корректность. Пусть $C_1'x + D_1'u = C_1'\bar{x} + D_1'\bar{u}$, тогда в силу того, что $\alpha = \alpha_2\alpha_1 = \alpha_2'\alpha_1'$, имеем

$$B_2(C_1x + D_1u) = B_2'C_1'x + B_2'D_1'u = B_2'(C_1'\bar{x} + D_1'\bar{u}) = B_2(C_1\bar{x} + D_1\bar{u}). \quad (6)$$

Аналогично имеем также

$$D_2(C_1x + D_1u) = D_2(C_1\bar{x} + D_1\bar{u}). \quad (7)$$

Из (3), (6), (7) следует корректность определения оператора D_0. Затем продолжаем по непрерывности на замыкание линейной оболочки векторов $C_1'x + D_1'u$, которое согласно (3) совпадает с U_0. Для проверки двух последних равенств в (5) следует заметить следующие соотношения:

$$B_2'(C_1'x + D_1'u) = B_2C_1x + B_2D_1u = B_2D_0(C_1'x + D_1'u),$$
$$D_2'(C_1'x + D_1'u) = D_2C_1x + D_2D_1u = D_2D_0(C_1'x + D_1'u),$$

и плотность векторов $C_1'x + D_1'u$ в U_0.

Ограниченная обратимость оператора D_0 следует из конструкции самого оператора D_0 и из условий (4). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Эта теорема дает метод построения различных декомпозиций системы из какой-нибудь известной декомпозиции. В классе консервативных систем рассеяния условия (3), (4) выполняются и подобная теорема рассмотрена в [6].

3. Рассмотрим произвольную линейную стационарную систему α. Пусть X_c — ее подпространство управляемости, тогда проекция $\alpha_c \equiv \equiv \mathrm{Pr}_{X_c}\alpha$ системы α на X_c, очевидно, является управляемой системой.

О п р е д е л е н и е 3. *Систему α будем называть вполне неуправляемой (соответственно вполне ненаблюдаемой), если подпространство X (соответственно подпространство наблюдаемости X_0) нулевое.*

Пусть $X_C^\perp = X \ominus X_c$. Тогда очевидно, что $\alpha_c^\perp \equiv \mathrm{Pr}_{X_C^\perp}\alpha$ — вполне неуправляемая система. Системы α_c, $\alpha_c^\perp$ будем называть управляемой и вполне неуправляемой частями системы α. Аналогично системы $\alpha_0 \equiv \mathrm{Pr}_{X_0}\alpha$, $\alpha_0^\perp \equiv \mathrm{Pr}_{X_0^\perp}\alpha$ называются соответственно наблюдаемой и вполне ненаблюдаемой частями. Из конструкции теоремы 1 следует такое утверждение.

П р е д л о ж е н и е 3. *Каждая линейная стационарная система α допускает каскадную декомпозицию $\alpha = \alpha_2\alpha_1$, где α_2 — управляемая система и является расширением управляемой части α_c, система α_1 — вполне неуправляема и является расширением вполне неуправляемой части $\alpha_c^\perp$ системы α.*

Двойственным результатом является следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 4. *Каждая линейная стационарная система α допускает каскадную декомпозицию $\alpha = \hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_1$ где $\hat{\alpha}_1$ — наблюдаемая система и является расширением наблюдаемой части $\alpha_0 \equiv \mathrm{Pr}_{X_0}\alpha$, а система $\hat{\alpha}_2$ — вполне ненаблюдаема и является расширением вполне ненаблюдаемой части $\alpha_0^\perp = \mathrm{Pr}_{X_0^\perp}\alpha$ системы α.*

С л е д с т в и е 5. *Каждая линейная стационарная система α допускает каскадную декомпозицию $\alpha = \alpha_3\alpha_2\alpha_1$, где α_1 — вполне неуправляемая система, α_2 — минимальная (т. е. управляемая и наблюдаемая) система, α_3 — вполне ненаблюдаемая система.*

З а м е ч а н и е. Из этих построений нетрудно заметить, что для любой системы α существует ортогональное разложение пространства состояний $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$, относительно которого элементы системы α имеют следующий матричный вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ & * & A_3 & \\ & & & A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1, 0, C_3, 0).$$

При этом система $Pr_{X_1}\alpha$ вполне неуправляема и наблюдаема, система $\mathrm{Pr}_{X_2}\alpha$ вполне неуправляема и вполне ненаблюдаема, система $\mathrm{Pr}_{X_3}\alpha$ управляема и наблюдаема, а система $\mathrm{Pr}_{X_4}\alpha$ управляема и вполне ненаблюдаема. Это есть бесконечномерный вариант теоремы Калмана [8].

Из этих построений также следует следующая связь между этой декомпозицией Калмана и каскадной декомпозицией.

Предложение 6. *Каждая линейная стационарная система* α *допускает каскадную декомпозицию* $\alpha = \alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ *такую, что система* α_k, $k = 1, 2, 3, 4$, *является расширением проекции* $\mathrm{Pr}_{X_k}\alpha$ *структурной декомпозиции Калмана.*

1. *Kalman R. E.* Controbution to the theory of optimal control // Bol. Soc. Math. Mech.— 1960.— **5**.— P. 102—119.
2. *Математические* методы в теории систем // Под. ред. Ю. И. Журавлева.— М. : Мир, 1979.— 327 с.
3. *Лившиц М. С.* Линейные дискретные системы и их связь с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна // Докл. АН СССР.— 1974.— **219**, № 4.— С. 793—796.
4. *До Конг Хань.* Исследование операторов, реализующих некоторые классы мероморфных функций // Изв. АН АрмССР.— 1976.— **11**, № 3.— С. 203—221.
5. *Аров Д. З.* Линейные стационарные пассивные системы с потерями: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Одесса, 1983.— 298 с.
6. *Бродский М. С.* Унитарные узлы и их характеристические функции // Успехи мат. наук.— 1978.— **33**, вып. 4.— С. 141—168.
7. *Eilenberg S.* Automata, languages and machines, vol. A.— Nev York: Acad. press, 1974.
8. *Helton J. W.* Discsete time systems, operator models and scattering theory // J. Funct. Anal.— 1974.— **16**, N 1.— P. 15—38.

Вьетнам

Получено 22.02.88