

## Экстремальные длины и гриновы емкости конденсаторов

Установлено равенство между гриновой емкостью конденсатора и 2-модулем надлежащего семейства кривых.

Встановлена рівність між гриною ємністю конденсатора і 2-модулем відповідної сім'ї кривих.

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 3$ , — область с классической функцией Грина  $g(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in D$  [1];  $D_*$  — ее одноточечная компактификация;  $E^+$ ,  $E^- \subset D$  — непустые замкнутые в  $D$  множества без иррегулярных точек, удовлетворяющие условию

$\sup_{x \in E^+, y \in E^-} g(x, y) < \infty$ ;  $E = (E^+, E^-)$ ;  $D$  — конденсатор в  $D$  с «пластинами»

$E^+$  и  $E^-$  [2]. В настоящей работе установлено равенство между гриновой емкостью конденсатора  $E$  и 2-модулем семейства кривых, соединяющих  $E^+$  и  $E^-$  в  $D_*$ .

Приведем необходимые определения. Для конденсатора  $E$  обозначим через  $\mathcal{N}^1(E)$  класс всех борелевских зарядов  $\nu$  с жордановым разложением  $\nu = \nu^+ - \nu^-$ , у которых  $\nu^+$  и  $\nu^-$  — единичные меры, сосредоточенные соответственно на  $E^+$  и  $E^-$ . Положим  $V(E) := \inf_{\nu \in \mathcal{N}^1(E)} \mathcal{J}(\nu)$ , где  $\mathcal{J}(\nu) :=$

$\iint_{D \times D} g(x, y) d\nu(x) d\nu(y)$  — гринова энергия заряда  $\nu$  [1]. Величину  $\text{cap } E :=$

$V(E)^{-1}$  назовем гриновой емкостью конденсатора  $E$ .

Пусть  $\gamma$  — кривая в  $\mathbb{R}^p$ ;  $\gamma: (\tau_1, \tau_2) \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\tau_1, \tau_2 \in [-\infty, +\infty]$ , — некоторая ее параметризация. Будем писать  $\gamma \subset Q$  ( $Q$  — множество из  $\mathbb{R}^p$ ), если  $|\gamma| := \{x: x = \gamma(t)\} \subset Q$ . Все рассматриваемые в работе кривые  $\gamma$  предполагаются локально спрямляемыми и такими, что сужение  $\gamma(t)$  на всякий интервал отлично от постоянного отображения.

Пусть  $\Gamma$  — некоторое семейство, каждый элемент  $l$  которого является конечным или счетным набором кривых  $l_i \subset \mathbb{R}^p$ . Элементы множества  $\Gamma$  будем называть составными кривыми, а для их обозначения будем применять следующую условную запись:  $l = \bigcup_i l_i$ . Пусть  $\mathcal{F}(\Gamma)$  — совокупность всех борелевых функций  $\rho: \mathbb{R}^p \rightarrow [0, +\infty]$ , удовлетворяющих условию  $\int_l \rho ds := \sum_i \int_{l_i} \rho ds \geq 1 \quad \forall l \in \Gamma$ . Величину

$$M_2(\Gamma) := \inf_{\rho \in \mathcal{F}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}^p} \rho^2 dm_p$$

( $m_p$  —  $p$ -мера Лебега) называют 2-модулем семейства  $\Gamma$ .

Пусть  $\omega := D_* \setminus D$ ;  $O \in D$  — произвольная фиксированная точка;  $\langle D_*, \mathcal{T} \rangle$  — топологическое пространство с топологией  $\mathcal{T}$ , база которой состоит из множеств  $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ ,  $x \in D_*$ ,  $\varepsilon > 0$ , где  $\mathcal{V}_\varepsilon(\omega) := \{y \in D : g(y, O) < \varepsilon\} \cup \{\omega\}$  и  $\mathcal{V}_\varepsilon(x) := \{y \in D : g(y, x) > \varepsilon^{-1}\}$ ,  $x \neq \omega$ . Скажем, что кривая  $\gamma \subset D$  соединяет множества  $Q_1$  и  $Q_2$ ,  $Q_1, Q_2 \subset D_*$ , если замыкание множества  $|\gamma|$  в топологии  $\mathcal{T}$  имеет непустые пересечения и с  $Q_1$ , и с  $Q_2$ . Совокупность всех кривых  $\gamma \subset D$ , соединяющих  $Q_1$  и  $Q_2$ , обозначим через  $\Gamma(Q_1, Q_2; D)$ .

Будем говорить, что составная кривая  $l$  соединяет  $E^+$  и  $E^-$  с помощью точки  $\omega$ , если  $l = l_+ \cup l_-$  и  $l_+ \in \Gamma(E^+, \{\omega\}; D)$ ,  $l_- \in \Gamma(E^-, \{\omega\}; D)$ . Совокупность всех составных кривых, соединяющих  $E^+$  и  $E^-$  с помощью  $\omega$ , обозначим  $\Gamma_\omega(E^+, E^-)$ .

Если для составной кривой  $l \in \Gamma_\omega(E^+, E^-)$  существуют такие параметризации ее составляющих  $l_+ : (\tau_1, \tau_2) \rightarrow D$  и  $l_- : (\tau_2, \tau_3) \rightarrow D$ , что в  $\langle D_*, \mathcal{T} \rangle$  выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow \tau_2, t < \tau_2} l_+(t) = \omega = \lim_{t \rightarrow \tau_2, t > \tau_2} l_-(t),$$

то условимся говорить, что  $l$  продолжима до кривой в  $D_*$ . Совокупность всех тех  $l \in \Gamma_\omega(E^+, E^-)$ , которые продолжимы до кривых в  $D_*$ , обозначим через  $\Gamma_\omega^0(E^+, E^-)$ .

Положим

$$\Gamma_E := \Gamma(E^+, E^-; D) \cup \Gamma_\omega(E^+, E^-), \quad \Gamma_E^0 := \Gamma(E^+, E^-; D) \cup \Gamma_\omega^0(E^+, E^-).$$

Тогда  $\Gamma_E^0 \subset \Gamma_E$  и, следовательно [3],

$$M_2(\Gamma_E^0) \leq M_2(\Gamma_E). \quad (1)$$

В принятых условиях и обозначениях справедливы следующие теоремы.

**Т е о р е м а 1.** *Верно равенство*

$$M_2(\Gamma_E) = a_p \operatorname{cap} E, \quad (2)$$

где  $a_p$  — умноженная на  $p - 2$  площадь единичной гиперболы в  $\mathbb{R}^p$ .

**Т е о р е м а 1'.** *Пусть выполнено условие  $m_p(D) < \infty$ . Тогда*

$$M_2(\Gamma_E^0) = M_2(\Gamma_E) = a_p \operatorname{cap} E. \quad (2')$$

Теоремы 1 и 1' остаются справедливыми, если в семействах  $\Gamma_E$  и  $\Gamma_E^0$  рассматривать только аналитические кривые.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим сначала, что множество  $E^+ \cup E^-$  компактно в  $D$  (такой конденсатор  $E$  называют компактным). Как известно [2, 4], в классе  $\mathfrak{N}^1(E)$  существует и единствен заряд  $\lambda \equiv \lambda_E$ , удовлетворяющий условию  $\mathcal{J}(\lambda) = V(E)$ . Нам понадобятся следующие свойства его гринова потенциала [4]

$$u^\lambda(x) := \int_D g(x, y) d\lambda(y), \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

Пусть  $(v_1, v_2) := \int_{D \times D} g(x, y) dv_1(x) dv_2(y)$  — взаимная гринова энергия зарядов  $v_1$  и  $v_2$ . Потенциал  $u^\lambda(x)$  непрерывен в  $\overline{\mathbb{R}^p} := \mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$ , гармоничен в  $Z := D \setminus (E^+ \cup E^-)$ , субгармоничен в  $D \setminus E^+$ , супергармоничен в  $D \setminus E^-$  и удовлетворяет соотношениям

$$(\lambda^-, \lambda) \leq u^\lambda(x) \leq (\lambda^+, \lambda) \quad \forall x \in \mathbb{R}^p,$$

$$u^\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda^+, \lambda) & \forall x \in E^+, \\ (\lambda^-, \lambda) & \forall x \in E^-, \end{cases}$$

причем  $-\infty < (\lambda^-, \lambda) \leq 0 \leq (\lambda^+, \lambda) < +\infty$ . Заметим, что  $\mathcal{J}(\lambda) = (\lambda^+, \lambda) - (\lambda^-, \lambda)$  и  $\mathcal{J}(\lambda) \geq \max\{(\lambda^+, \lambda), -(\lambda^-, \lambda)\}$ .

Докажем неравенство

$$M_2(\Gamma_E) \leq a_p \operatorname{cap} E. \quad (3)$$

Пусть  $u(x) := (\operatorname{cap} E) U^\lambda(x)$ ,  $\rho_0(x)$  — функция, равная  $|\operatorname{grad} u(x)|$  для  $x \in Z$  и нулю для  $x \notin Z$ . Покажем, что

$$\rho_0 \in \mathcal{J}(\Gamma_E). \quad (4)$$

Пусть  $l \subset Z$  — некоторая кривая. В силу принятых предположений существует параметризация  $l: (\tau_1, \tau_2) \rightarrow Z$  кривой  $l$ , удовлетворяющая условию  $\int ds = t_2 - t_1 \quad \forall t_1, t_2, \tau_1 < t_1 < t_2 < \tau_2$ . При этом сужения функций  $l(t)$  и  $u(l(t))$  на  $[t_1, t_2]$  абсолютно непрерывны и  $|dl/dt| = 1$  почти всюду на  $[t_1, t_2]$ . Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_l \rho_0 ds &\geq \int_{t_1}^{t_2} |\operatorname{grad} u(l(t))| \left| \frac{dl}{dt} \right| dt \geq \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{du(l(t))}{dt} dt \right| = \\ &= |u(l(t_1)) - u(l(t_2))| \quad \forall t_1, t_2 \in (\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть  $\gamma \in \Gamma(E^+, E^-; D)$ ;  $\varepsilon > 0$  — произвольное фиксированное число. Из приведенных свойств потенциала  $U^\lambda(x)$  следует существование скрещеностей  $\Theta_+$  и  $\Theta_-$  множеств  $E^+$  и  $E^-$ , в которых верны неравенства

$$u(x) > (\lambda^+, \lambda) \operatorname{cap} E - \varepsilon \quad \forall x \in \Theta_+, \quad u(x) < (\lambda^-, \lambda) \operatorname{cap} E + \varepsilon \quad \forall x \in \Theta_-,$$

а из определения семейства  $\Gamma(E^+, E^-; D)$  и отделимости  $E^+$  и  $E^-$  — существование дуги  $\gamma_\varepsilon$  кривой  $\gamma$  такой, что  $\gamma_\varepsilon \subset Z$  и множества  $|\gamma_\varepsilon| \cap \Theta_+$ ,  $\gamma_\varepsilon| \cap \Theta_-$  непусты. Из (5) получаем  $\int_\gamma \rho_0 ds \geq \int_{\gamma_\varepsilon} \rho_0 ds \geq [(\lambda^+, \lambda) - (\lambda^-, \lambda)] \times \times \operatorname{cap} E - 2\varepsilon = 1 - 2\varepsilon$ . Отсюда в силу произвольности  $\varepsilon$  находим  $\rho_0 \in \mathcal{J}(\Gamma(E^+, E^-; D))$ .

Аналогично убеждаемся, что

$$\int_\gamma \rho_0 ds \geq \begin{cases} (\lambda^+, \lambda) \operatorname{cap} E & \forall \gamma \in \Gamma(E^+, \{\omega\}; D), \\ -(\lambda^-, \lambda) \operatorname{cap} E & \forall \gamma \in \Gamma(E^-, \{\omega\}; D). \end{cases}$$

Следовательно, верно (4).

Пользуясь известным представлением интеграла гриновой энергии через интеграл Дирихле [1], из (4) получаем

$$\begin{aligned} M_2(\Gamma_E) &\leq \int_{\mathbb{R}^p} \rho_0^2(x) dm_p(x) \leq (\operatorname{cap} E)^2 \int_D |\operatorname{grad} U^\lambda(x)|^2 dm_p(x) = \\ &= a_p (\operatorname{cap} E)^2 \mathcal{J}(\lambda) = a_p \operatorname{cap} E. \end{aligned}$$

Неравенство (3) доказано. Из (1) и (3) находим  $M_2(\Gamma_E^0) \leq a_p \operatorname{cap} E$ .

Все дальнейшие рассуждения необходимы для доказательства неравенства

$$M_2(\Gamma_E) \geq a_p \operatorname{cap} E \quad (6)$$

и в случае выполнения условия  $m_p(D) < \infty$  — неравенства

$$M_2(\Gamma_E^0) \geq a_p \operatorname{cap} E. \quad (7)$$

Пусть конденсатор  $E$  удовлетворяет следующему условию (\*): все компоненты связности множества  $Z$ , которые граничат в  $D_*$  с  $\omega$ , граничат в  $D$  только с  $E^+$  (только с  $E^-$ ). Из результатов работ [4, 5] следует, что в этом случае величина  $a_p \operatorname{cap} E$  равна 2-емкости конденсатора  $(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$  (определение этой характеристики см., например, в [6]). Используя из-

вестное представление 2-емкостей конденсаторов через экстремальные длины [6], получаем  $a_p \operatorname{cap} E = M_2(\Gamma(E^+, E^-; \mathbb{R}^p))$ . Но в силу условия (\*) для всякой кривой  $\gamma \in \Gamma(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$  найдется ее дуга, принадлежащая семейству  $\Gamma(E^+, E^-; D)$ . Отсюда с помощью известных свойств модулей [3] находим  $M_2(\Gamma_E) \geq M_2(\Gamma_E^0) \geq M_2(\Gamma(E^+, E^-; D)) = M_2(\Gamma(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)) = a_p \operatorname{cap} E$ . Следовательно, верно (6) и (7). (Заметим, что при условии (\*) неравенство (7), а значит, и равенства (2') установлены без дополнительного требования  $m_p(D) < \infty$ . Можно также видеть, что в этом случае справедливость равенств (2') не нарушится, если отказаться от принятых в начале работы условий регулярности.)

Всюду далее будем считать, что условие (\*) не выполняется. Тогда [4]  $(\lambda^+, \lambda) > 0$ ,  $(\lambda^-, \lambda) < 0$ . Отсюда ввиду свойства непрерывности  $U^\lambda(x)$  находим, что множество  $U_0 := \{x \in D : U^\lambda(x) = 0\}$  замкнуто в  $D$  и отделимо от  $E^+ \cup E^-$ , а каждая связная компонента  $S_i$  открытого множества  $D \setminus U_0$  имеет непустое пересечение либо только с  $E^+$ , либо только с  $E^-$ . Пусть  $U_+$  (аналогично  $U_-$ ) — объединение всех тех  $S_i$ , которые имеют непустое пересечение с  $E^+$  (соответственно с  $E^-$ ). Тогда множества  $U_0$ ,  $U_+$  и  $U_-$  попарно не пересекаются и в объединении дают все  $D$ , причем  $U_+ \supset E^+$ ,  $U_- \supset E^-$ . Из свойств суб- и супергармоничности  $U^\lambda(x)$  соответственно на  $U_-$  и  $U_+$  находим

$$U^\lambda(x) > 0 \quad \forall x \in U_+, \quad U^\lambda(x) < 0 \quad \forall x \in U_-.$$

Точку  $z \in Z$  назовем критической, если  $\operatorname{grad} U^\lambda(z) = 0$ . Множество всех критических точек  $z \in Z$  обозначим символом  $X$ , а множество всех критических значений  $\{U^\lambda(z), z \in X\}$  — символом  $Y$ . Пусть  $\mathcal{E}_q$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , — эквипотенциальное множество  $\{x \in \mathbb{R}^p : U^\lambda(x) = q\}$ . Известно, что если потенциал  $U^\lambda(x)$  в произвольно малой окрестности точки  $x_0 \in Z \setminus X$  не равен тождественно постоянной, то эквипотенциальное множество  $\mathcal{E}_{U^\lambda(x_0)}$  локально в  $x_0$  совпадает с некоторым аналитическим  $(p-1)$ -мерным многообразием.

Примем следующее определение. Пусть  $F_1, F_2 \subset \overline{\mathbb{R}^p}$  — непустые отделимые множества, причем  $F_2$  содержит в себе бесконечно удаленную точку. Пусть, далее,  $h \subset \mathbb{R}^p$  — замкнутая гиперповерхность, т. е. [3] компактная  $(p-1)$ -мерная липшицева поверхность, не обязательно связная. Будем говорить, что  $h$  отделяет  $F_1$  от  $F_2$ , если множество  $\overline{\mathbb{R}^p} \setminus h$  представимо в виде объединения двух непересекающихся открытых в  $\overline{\mathbb{R}^p}$  множеств  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ , где  $\Theta_1 \supset F_1$  и  $\Theta_2 \supset F_2$ , причем все компоненты связности (ограниченного) множества  $\Theta_1$  попарно отделимы. Совокупность всех замкнутых гиперповерхностей  $h \subset \mathbb{R}^p$ , отделяющих  $F_1$  от  $F_2$ , обозначим через  $H(F_1, F_2)$ .

Множества  $(0, (\lambda^+, \lambda)) \setminus Y$  и  $((\lambda^-, \lambda), 0) \setminus Y$  непусты, что следует, например, из теоремы Келлога [7]. Пусть  $\alpha \in (0, (\lambda^+, \lambda)) \setminus Y$  и  $\beta \in ((\lambda^-, \lambda), 0) \setminus Y$  — фиксированные числа. Из отмеченных свойств потенциала  $U^\lambda(x)$  легко получить следующее утверждение:

$$\mathcal{E}_\alpha \in H(E^+, \overline{\mathbb{R}^p} \setminus U_+), \quad \mathcal{E}_\beta \in H(E^-, \overline{\mathbb{R}^p} \setminus U_-). \quad (8)$$

Для борелевского множества  $K$ , лежащего в  $\mathcal{E}_\alpha$  или в  $\mathcal{E}_\beta$ , обозначим  $\Pi(K) := \int_K |\operatorname{grad} U^\lambda| d\sigma$  (интегрирование производится по соответствующей поверхностной мере). В силу (8) имеем

$$\Pi(\mathcal{E}_\alpha) = \Pi(\mathcal{E}_\beta) = a_p. \quad (9)$$

Пусть  $x = x(z, t)$  — решение задачи Коши

$$dx/dt = v(x), \quad x|_{t=0} = z,$$

где  $z \in Z$  и  $v(x) := \text{grad } U^\lambda(x)$ ,  $x \in Z$ . Известно, что такое решение существует и единственно. Обозначим через  $\tau^-(z)$  и  $\tau^+(z)$  соответственно левый и правый конец максимального открытого интервала, на который функция  $x(z, t)$  продолжима в  $Z$  непрерывно по  $t$ . При  $z \in X$  верно  $x(z, t) = z \forall t \in (-\infty, +\infty)$ . При  $z \notin X$  функция  $x(z, t)$ ,  $t \in (\tau^-(z), \tau^+(z))$ , определяет аналитическую кривую  $L_z$ . Кривая  $L_z$  не содержит в себе точек из  $X$  и не имеет точек самопересечения. Заметим также, что функция  $U^\lambda(x(z, t))$  строго возрастает, и поэтому существуют пределы

$$u^+(z) := \lim_{t \rightarrow \tau^+(z)} U^\lambda(x(z, t)), \quad u^-(z) := \lim_{t \rightarrow \tau^-(z)} U^\lambda(x(z, t)).$$

Пусть  $Q \subset D_*$  — множество. Будем писать  $z(x, t) \rightarrow Q$  при  $t \rightarrow t_0$ , если для всякого открытого в  $\mathcal{F}$  множества  $\Theta$ , содержащего  $Q$ , верно  $x(z, t) \in \Theta$  для всех  $t$ , достаточно близких к  $t_0$ .

Следующие леммы доказываются с использованием тех же идей, что и лемма 5 из [3].

**Лемма 1.** Пусть  $z \in U_+ \cup U_0$ ,  $U^\lambda(z) < (\lambda^+, \lambda)$ . Тогда в случае  $\tau^+(z) < +\infty$  верно  $x(z, t) \rightarrow E^+$  при  $t \rightarrow \tau^+(z)$ , а в случае  $\tau^-(z) > -\infty$  верно либо  $x(z, t) \rightarrow \{\omega\}$ , либо  $x(z, t) \rightarrow E^-$  при  $t \rightarrow \tau^-(z)$ .

**Лемма 1'.** Пусть  $z \in U_- \cup U_0$ ,  $U^\lambda(z) > (\lambda^-, \lambda)$ . Тогда в случае  $\tau^-(z) > -\infty$  верно  $x(z, t) \rightarrow E^-$  при  $t \rightarrow \tau^-(z)$ , а в случае  $\tau^+(z) < +\infty$  верно либо  $x(z, t) \rightarrow E^+$ , либо  $x(z, t) \rightarrow \{\omega\}$  при  $t \rightarrow \tau^+(z)$ .

Аналогично [3] рассмотрим преобразование  $\varphi_\alpha: (\xi, t) \rightarrow x(\xi, t)$  между  $\mathcal{E}_\alpha \times \mathbb{R}$  и  $Z$ . Пусть  $\Delta_\alpha$  и  $G_\alpha$  — соответственно область определения и область значений для  $\varphi_\alpha$ . Множества  $\Delta_\alpha$  и  $G_\alpha$  открыты, а отображение  $\varphi_\alpha$  взаимно однозначно, непрерывно по  $(\xi, t)$  и имеет непрерывные частные производные по каждому аргументу. Если  $t' = (t_1, \dots, t_{p-1})$  — множество локальных параметров аналитической гиперповерхности  $\mathcal{E}_\alpha$ , а  $\sigma_\alpha$  — поверхностная мера на  $\mathcal{E}_\alpha$ , то якобиан  $J_\alpha$  преобразования  $\varphi_\alpha$  имеет вид [3]

$$J_\alpha = |v(\xi)| d\sigma_\alpha(\xi)/dt',$$

а элемент объема для  $x \in G_\alpha$  в координатах  $(\xi, t)$  — вид

$$dx = J_\alpha dt' dt = |v(\xi)| d\sigma_\alpha(\xi) dt.$$

Заменяя  $\alpha$  на  $\beta$ , получаем определения объектов  $\varphi_\beta$ ,  $\Delta_\beta$ ,  $G_\beta$ ,  $\sigma_\beta$  и  $J_\beta$ .

Множество  $G_\alpha \cap G_\beta$  открыто и обладает следующим свойством: если  $z \in G_\alpha \cap G_\beta$ , то линия тока вектора  $v$ , проходящая через точку  $z$ , полностью лежит в  $G_\alpha \cap G_\beta$ . Действительно, для  $z \in G_\alpha \cap G_\beta$  существуют  $\xi \in \mathcal{E}_\alpha$  и  $\eta \in \mathcal{E}_\beta$  такие, что  $z \in |L_\xi| \subset G_\alpha$  и  $z \in |L_\eta| \subset G_\beta$ . По теореме единственности имеем  $L_z = L_\xi = L_\eta$  и, следовательно,  $L_z \subset G_\alpha \cap G_\beta$ . Применяя теорему Гаусса к множеству  $G_\alpha \cap G_\beta$ , получаем

$$\Pi(\mathcal{E}_\alpha \cap G_\beta) = \Pi(\mathcal{E}_\beta \cap G_\alpha). \quad (10)$$

Пусть  $A_1$  (соответственно  $A_2$ ) — множество всех тех  $\xi \in \mathcal{E}_\alpha$ , для которых  $L_\xi \in \Gamma(E^+, \{\omega\}; D)$  (соответственно,  $L_\xi \in \Gamma(E^+, E^-; D)$ ). Тогда

$$u^+(\xi) = (\lambda^+, \lambda) \quad \forall \xi \in A_1 \cup A_2, \quad u^-(\xi) = \begin{cases} 0 & \forall \xi \in A_1, \\ (\lambda^-, \lambda) & \forall \xi \in A_2. \end{cases} \quad (11)$$

Справедливы включения

$$A_1 \subset \mathcal{E}_\alpha \setminus G_\beta, \quad A_2 \subset \mathcal{E}_\alpha \cap G_\beta. \quad (12)$$

Действительно, если  $\xi_0 \in A_2$ , то множество  $|L_{\xi_0}| \cap \mathcal{E}_\beta$  содержит некоторую (единственную) точку  $\eta_0$ . Но тогда  $L_{\xi_0} = L_{\eta_0}$  и  $\xi_0 \in |L_{\eta_0}| \subset G_\beta$ . С другой стороны, если  $\xi_1 \in \mathcal{E}_\alpha \cap G_\beta$ , то  $\xi_1 \in |L_{\eta_1}|$  для некоторого  $\eta_1 \in \mathcal{E}_\beta$  и, значит,  $u^-(\xi_1) \leq \beta < 0$ . Следовательно,  $\xi_1 \notin A_1$ .

Докажем равенство

$$\sigma_\alpha(A_1 \cup A_2) = \sigma_\alpha(\mathcal{E}_\alpha). \quad (13)$$

Пусть  $\{D_k\}$  — упорядоченная по включению последовательность ограниченных областей, исчерпывающих  $D$ ,  $Z_k := D_k \setminus (E^+ \cup E^-)$ ,  $G_\alpha^{(k)} := G_\alpha \cap Z_k$ . Будем считать  $k$  настолько большим, чтобы  $D_k \supset \{x \in D : U^k(x) \geq \alpha\} \cup E^-$ . Для  $\xi \in \mathcal{E}_\alpha$  обозначим через  $\tau_k^-(\xi)$  и  $\tau_k^+(\xi)$  соответственно левый и правый концы максимального открытого интервала, на который  $x(\xi, t)$  продолжима непрерывно в  $Z_k$ . Тогда  $\tau_k^+(\xi) = \tau^+(\xi) \forall \xi \in \mathcal{E}_\alpha$  и

$$\int_{\mathcal{E}_\alpha} |\nu(\xi)| [\tau^+(\xi) - \tau_k^-(\xi)] d\sigma_\alpha(\xi) \leq m_p(G_\alpha^{(k)}) < +\infty. \quad (14)$$

Обозначим  $A_+ := \{\xi \in \mathcal{E}_\alpha : \tau^+(\xi) = +\infty\}$ ,  $A_- := \bigcup_k A_-^{(k)}$ , где  $A_-^{(k)} := \{\xi \in \mathcal{E}_\alpha : \tau_k^-(\xi) = -\infty\}$ . Из соотношений (14) находим

$$\sigma_\alpha(A_+ \cup A_-) = 0. \quad (15)$$

Верно включение  $\mathcal{E}_\alpha \setminus (A_+ \cup A_-) \subset A_1 \cup A_2$ . Действительно, если  $\xi \in \mathcal{E}_\alpha \setminus (A_+ \cup A_-)$ , то в силу леммы 1  $x(\xi, t) \rightarrow E^+$  при  $t \rightarrow \tau^+(\xi)$  и верно одно из двух: либо  $L_\xi$  неограничено в  $D$ , либо  $L_\xi$  содержится в некотором  $G_\alpha^{(k)}$ , и тогда  $\tau^-(\xi) = \tau_{k_0}^-(\xi) > -\infty$ . В первом случае имеем  $\xi \in A_1$ , а во втором (в силу леммы 1') —  $\xi \in A_2$ . Из доказанного включения и равенства (15) получаем (13).

Аналогично, пусть  $B_1$  (соответственно  $B_2$ ) — множество всех тех  $\eta \in \mathcal{E}_\beta$ , для которых  $L_\eta \in \Gamma(E^-, \{\omega\}; D)$  (соответственно,  $L_\eta \in \Gamma(E^-, E^+; D)$ ). Тогда верны утверждения

$$u^+(\eta) = \begin{cases} 0 & \forall \eta \in B_1, \\ (\lambda^+, \lambda) & \forall \eta \in B_2, \end{cases} \quad u^-(\eta) = (\lambda^-, \lambda) \quad \forall \eta \in B_1 \cup B_2, \quad (16)$$

$$B_1 \subset \mathcal{E}_\beta \setminus G_\alpha, \quad B_2 \subset \mathcal{E}_\beta \cap G_\alpha, \quad (17)$$

$$\sigma_\beta(B_1 \cup B_2) = \sigma_\beta(\mathcal{E}_\beta). \quad (18)$$

Пусть  $z \in Z \setminus X$ ,  $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$  — борелевская функция. Обозначим

$$T(f, z) := \int_{\tau^-(z)}^{\tau^+(z)} f(x(z, t)) dt.$$

Справедливо равенство

$$T(|\nu|^2, z) = u^+(z) - u^-(z) \quad \forall z \in Z \setminus X. \quad (19)$$

Пусть  $\rho$  — произвольная фиксированная метрика из класса  $\mathcal{F}(\Gamma_E)$ . Тогда

$$T(\rho|\nu|, z) = \int_{L_z} \rho ds \geq 1 \quad \forall z \in A_2 \cup B_2. \quad (20)$$

Учитывая соотношения (11), (16) и (19), из (20) в результате применения неравенства Буняковского — Шварца находим

$$T(\rho^2, z) \geq \text{cap } E \quad \forall z \in A_2 \cup B_2. \quad (21)$$

Далее, пусть  $\xi \in A_1$ ,  $\eta \in B_1$ . Составная кривая  $L_\xi \cup L_\eta$  принадлежит классу  $\Gamma_E$ , поэтому  $T(\rho|\nu|, \xi) + T(\rho|\nu|, \eta) \geq 1$ . Несложные выкладки, включающие замену переменных и применение неравенства Буняковского — Шварца, показывают, что

$$[T(\rho^2, \xi) + T(\rho^2, \eta)] [T(|\nu|^2, \xi) + T(|\nu|^2, \eta)] \geq 1.$$

Пользуясь соотношениями (11), (16), (19) и учитывая произвольность точек  $\xi \in A_1$ ,  $\eta \in B_1$ , находим

$$a + b \geq \text{cap } E, \quad (22)$$

где  $a := \inf_{\xi \in A_1} T(\rho^2, \xi)$ ,  $b := \inf_{\eta \in B_1} T(\rho^2, \eta)$ .

Из цепочки соотношений

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} \rho(x)^2 dm_p(x) &\geq \int_{G_\alpha} \rho(x)^2 dm_p(x) + \int_{G_\beta} \rho(x)^2 dm_p(x) - \int_{G_\alpha \cap G_\beta} \rho(x)^2 dm_p(x) = \\ &= \int_{\mathcal{E}_\alpha} T(\rho^2, \xi) |v(\xi)| d\sigma_\alpha(\xi) + \int_{\mathcal{E}_\beta} T(\rho^2, \eta) |v(\eta)| d\sigma_\beta(\eta) - \\ &- \int_{\mathcal{E}_\alpha \cap G_\beta} T(\rho^2, \xi) |v(\xi)| d\sigma_\alpha(\xi) = \int_{\mathcal{E}_\alpha \setminus G_\beta} T(\rho^2, \xi) |v(\xi)| d\sigma_\alpha(\xi) + \\ &+ \int_{\mathcal{E}_\beta \cap G_\alpha} T(\rho^2, \eta) |v(\eta)| d\sigma_\beta(\eta) + \int_{\mathcal{E}_\beta \setminus G_\alpha} T(\rho^2, \eta) |v(\eta)| d\sigma_\beta(\eta), \end{aligned}$$

ввиду утверждений (12), (13), (17), (18) и (21) находим

$$\int_{\mathbb{R}^p} \rho(x)^2 dm_p(x) \geq a\Pi(\mathcal{E}_\alpha \setminus G_\beta) + (\text{cap } E) \Pi(\mathcal{E}_\beta \cap G_\alpha) + b\Pi(\mathcal{E}_\beta \setminus G_\alpha).$$

И наконец, учитывая (9), (10) и (22), имеем  $\int_{\mathbb{R}^p} \rho(x)^2 dm_p(x) \geq a_p \text{cap } E$ , что ввиду произвольности функции  $\rho \in \mathcal{F}(\Gamma_E)$  доказывает (6).

Пусть  $m_p(D) < +\infty$ . Неравенство (7) следует из приведенных рассуждений с учетом следующего замечания. В этом случае множество  $\{z \in \mathcal{E}_\alpha \cup \mathcal{E}_\beta : \tau^+(z) - \tau^-(z) = +\infty\}$  имеет  $(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$ -меру, равную нулю, и, следовательно (см. леммы I и I'), для почти всех  $\xi \in A_1$  и  $\eta \in B_1$  верно  $L_\xi \cup L_\eta \in I_E^0$ .

Теоремы I и I' доказаны для компактного конденсатора. В общем случае рассмотрим последовательность компактных конденсаторов  $E_k = (E_k^+, E_k^-, D)$  с регулярными пластинами  $E_k^+$  и  $E_k^-$  такими, что  $E_k^+ \subset E_{k+1}^+$ ,  $E_k^- \subset E_{k+1}^- \forall k$  и  $\bigcup_k E_k^+ = E^+$ ,  $\bigcup_k E_k^- = E^-$ . Тогда

$$M_2(\Gamma_{E_k}) = a_p \text{cap } E_k. \quad (23)$$

Из принятых определений видно, что  $\Gamma_{E_k} \subset \Gamma_{E_{k+1}} \forall k$  и  $\Gamma_E = \bigcup_k \Gamma_{E_k}$ .

Пользуясь леммами 8 из [2] и 2.3 из [8], путем предельного перехода в (23) получаем (2). Аналогично убеждаемся в справедливости теоремы I'.

1. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.— 515 с.
2. Зорий Н. В. О существовании зарядов с минимальной гриновой энергией для пространственных конденсаторов.— Киев, 1987.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.52).
3. Fuglede B. Extremal length and functional completion // Acta math.— 1957.— 98, N 3-4.— P. 171—219.
4. Зорий Н. В. Задача о минимуме гриновой энергии для пространственных конденсаторов // Вопросы анализа и дифференциальной топологии.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 39—47.
5. Зорий Н. В. Функциональные характеристики пространственных конденсаторов: их свойства, соотношения между ними // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 5.— С. 565—573.
6. Hesse J. A  $p$ -extremal length and  $p$ -capacity equality // Ark. mat.— 1975.— 13, N 1.— P. 131—144.
7. Kellogg O. D. Foundations of potential theory.— Berlin: Springer, 1929.— 384 p.
8. Ziemer W. P. Extremal length and  $p$ -capacity // Mich. Math. J.— 1969.— 16, N 1.— P. 43—51.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 23.06.88