УДК 519.21

Б. В. Бондарев

Об усреднении стохастических систем при слабо зависимых возмущениях

Исследуется процедура усреднения для стохастических систем с зависимостью от всего прошлого, подверженных воздействию, описываемому случайным процессом, удовлетворяющим условию сильного перемешивания. Для вероятности уклонения за уровень нормированных флуктуаций решения исходного стохастического уравнения относительно решения усредненного уравнения, которое оказывается детерминированным, построены экспоненциальные оценки типа известных неравенств С. Н. Бернштейна для сумм независимых случайных величин. Установленные неравенства можно использовать при построении доверительной полосы для решения исходного уравнения, границы которой определены детерминированным решением усредненного уравнения.

Вивчається процедура усереднення для стохастичних систем з залежністю від усього минулого, які знаходяться під дією випадкового процесу, що задовольняє умові сильного перемішування. Для ймовірності виходу за рівень нормованих флуктуацій розв'язку вихідного стохастичного рівняння відносно розв'язку усередненого рівняння, яке виявляється детермінованим, побудовані експоненціальні оцінки типу відомих нерівностей С. Н. Бернштейна для сум незалежних випадкових величин. Встановлені нерівності можна використовувати при побудові довірчої смуги для розв'язку вихідного рівняння, межі якої визначаються детермінованим розв'язком усередненого рівняння.

1. Пусть R — одномерное евклидово пространство, Φ — множество ограниченных функций $\varphi = \varphi(s)$, $s \in (-\infty, 0]$, со значениями в R с полунормой

$$\|\varphi\| = \left\{ \int_{-\infty}^{0} |\varphi(s)|^2 K(ds) \right\}^{1/2}.$$

Здесь $K(A)$ — некоторая конечная мера борелевских множеств полуоси $(-\infty, 0]$, $K(-\infty, 0] = K^2 < +\infty$.

Пусть $\xi_\varepsilon(t)$ — некоторый случайный процесс со значениями в R, зависящий от параметра $\varepsilon > 0$, определенный на $(-\infty, T/\varepsilon]$. Пусть θ_t — оператор, ставящий в соответствие траектории процесса $\xi_\varepsilon(\tau)$, $\tau \in (-\infty, T/\varepsilon]$, траекторию $\xi_t^\varepsilon(\cdot) = \xi_\varepsilon(t+s)$, $s \leqslant 0$, $t \in [0, T/\varepsilon]$, т. е. кусок траектории на промежутке времени от $-\infty$ до $t \in [0, T/\varepsilon]$. Предположим, что $\xi_\varepsilon(t)$ является решением уравнения

$$d\xi_\varepsilon/dt = \varepsilon F(t, \theta_t \xi_\varepsilon(\cdot), \omega),$$
$$\xi_\varepsilon(s) = \varphi_0(s), \quad s \leqslant 0, \quad |\varphi_0(s)| \leqslant C_0 < +\infty, \tag{1}$$

$\varphi_0(s)$ — неслучайная, где $F(t, \varphi, \omega)$ при фиксированном $\varphi \in \Phi$ — случайная функция, удовлетворяющая условию сильного перемешивания (с. п.) [1]; при фиксированных $t \in [0, T/\varepsilon]$, $\omega \in \Omega$ $F(t, \varphi, \omega)$ — функционал, определенный на множестве функций Φ.

Предполагаем, что с вероятностью 1 выполнено

$$|F(t, \varphi, \omega)| \leqslant C(1 + \|\varphi\|), \tag{2}$$

$$|F(t, \varphi, \omega) - F(t, \psi, \omega)| \leqslant L \|\varphi - \psi\|. \tag{3}$$

Как показано в [2], решение (1) при выполнении (2), (3) существует и единственно. Известно [3—9], что представляет большой интерес обоснование принципа усреднения для систем вида (2) и изучение флуктуаций решения исходного уравнения относительно решения усредненного уравнения. В работе [9] принцип усреднения обоснован для систем вида (1). Показано, в частности, что при некоторых требованиях усреднение стохастического уравнения с зависимостью от всего прошлого приводит к детерминированному уравнению без зависимости от прошлого. Для нормированных уклонений решения исходного уравнения относительно решения усредненного уравнения в равномерной метрике установлены экспоненциальные неравенства больших уклонений типа известных неравенств С. Н. Бернштейна для сумм независимых случайных величин [1]. Настоящая работа в идейном плане является продолжением работы [9]. Требование равномерно сильного перемешивания (р. с. п.), наложенное на случайный процесс $F(t, \varphi, \omega)$ в работе [9], заменено на с. п., что позволило включить в рассматриваемую схему случай гауссовских возмущений с зависимостью от всего прошлого. Как известно [1], условие р. с. п. для гауссовских величин равносильно требованию конечной зависимости. Предлагаемый метод исследования базируется на результатах работ [10, 11] и позволяет отказаться также и от ограниченности $F(t, \varphi, \omega)$ с вероятностью 1 на траектории усредненного уравнения, т. е. по сравнению с [9] в данной работе условия, предъявляемые к $F(t, \varphi, \omega)$, значительно ослаблены, что, естественно, привело к более грубым, по сравнению с [9], оценкам соответствующих вероятностей уклонений.

2. В работе [9] установлен следующий результат.

Теорема 1 [9]. *Пусть выполнены условия* (2), (3), *процесс* $F(t, \varphi, \omega)$ *удовлетворяет закону больших чисел в следующей форме*:

$$\sup_{\varphi\in\Phi,\, t\in[0, T/\varepsilon]} \left| \frac{1}{N} \int_t^{t+N} F(s, \varphi, \omega)\, ds - F_0(\varphi) \right| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty \tag{4}$$

по вероятности, $\int_{-\infty}^{-N} K(ds) \to$ *при* $N \to +\infty$.

Тогда

$$\sup_{t\in[0, T/\varepsilon]} |\xi_\varepsilon(t) - X_0^\varepsilon(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \tag{5}$$

также по вероятности. Здесь $X_0^\varepsilon(t)$ — *решение детерминированной задачи*

$$dX_0^\varepsilon/dt = \varepsilon F_0(\theta_t X_0^\varepsilon(\cdot)), \quad X_0^\varepsilon(s) = \varphi_0(s), \; s \leqslant 0 \tag{6}$$

Замечание. В случае, если

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \int_{-N}^{0} s^2 K(ds) = 0, \tag{7}$$

уравнение (6) примет вид

$$dX_0^\varepsilon/dt = \varepsilon F_0(\overline{\Theta}_t X_0^\varepsilon(\cdot)), \quad X_0^\varepsilon(0) = \varphi_0(0), \tag{8}$$

где

$$\overline{\theta}_t(x(\cdot)) = \begin{cases} X(t), & 0 \leqslant s \leqslant t, \\ \varphi_0(s), & s \leqslant 0, \end{cases} \tag{9}$$

т. е. усредненное уравнение в данном случае не имеет зависимости от прошлого.

Как известно [3—9], специфика вероятностного случая метода усреднения проявляется при исследовании флуктуаций решения исходного уравнения относительно решения усредненного уравнения.

Введем некоторые определения и понятия. Будем говорить, что при фиксированном $\varphi \in \Phi$ случайная функция $F(t; \varphi; \omega)$ удовлетворяет условию с. п. (перемешивание «по Розенблатту») если [1, 8]

$$\sup_{s\geqslant 0,\, A\in F_0^s,\, B\in F_{s+\tau}^{+\infty}} |P(A\cap B)-P(A)P(B)|=\alpha(\tau)\to 0$$

при $\tau\to\infty$. Здесь F_0^s — σ-алгебра, порожденная на основном вероятностном пространстве Ω процессом $F(t;\varphi;\omega)$, $\varphi\in\Phi$, $0\leqslant t\leqslant s$, $F_{s+\tau}^{\infty}$ — σ-алгебра, порожденная на Ω процессом

$$F(t;\varphi;\omega),\quad \varphi\in\Phi,\quad \tau+s\leqslant t<+\infty.$$

Пусть

$$\zeta_\varepsilon(t)=\left[\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-X_0^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

— флуктуации решения $\xi_\varepsilon(t)$ относительно решения усредненного уравнения (6).

Теорема 2. *Пусть*

а) *выполнены условия теоремы* 1;

б) *для некоторого* $\beta>0$ *имеет место*

$$\sup_{i\geqslant 0} M\exp\left\{\beta\int_i^{i+1}|F(s;\theta_s X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)-MF(s;\theta_s X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)|\,ds\right\}\leqslant\psi(\beta);\quad (10)$$

в) *коэффициент сильного перемешивания*

$$\alpha(m)\leqslant C\exp\{-\alpha m\},\quad C>0,\quad m>0,\quad \alpha>0.$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon>0$ *и большом* $R>0$ *справедливо*

$$P\{\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}|\xi_\varepsilon(t)-X_0^\varepsilon(t)|>\sqrt{\varepsilon}R\}\leqslant T/\varepsilon\psi(\beta)\exp\left\{-\beta\frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}+$$

$$+\frac{AT}{\varepsilon}\exp\left\{-\alpha(1-2^{-1/6})\left(\frac{T}{\varepsilon}-1\right)^{1/6}\right\}+2A\exp\left\{-B\left(\frac{r-\delta(\varepsilon)}{\sqrt{T}}\right)^{2/5}\right\},\quad (11)$$

где

$$A=\frac{\sqrt[5]{18}\,\sqrt[10]{C\psi(\beta)}\exp\left\{\dfrac{9+96\alpha}{480}\right\}}{\sqrt[20]{2\pi^7}},\quad B=\frac{1}{4}\sqrt[5]{\frac{\alpha\beta^2}{36}},$$

$$0<\delta(\varepsilon)<r,\quad \delta(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}\to+\infty,\quad \frac{T}{\varepsilon}e^{-\delta(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}}\to 0 \text{ \textit{при} } \varepsilon\to 0,$$

$$r=R\exp\{-LKT\}-\rho_\varepsilon(T),$$

$$\rho_\varepsilon(T)=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t[MF(\tau,\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)-F_0(\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right|.$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$\sup_{s\in[0,t/\varepsilon]}|\zeta_\varepsilon(s)|\leqslant LK\int_0^t\sup_{s\in[0,\tau/\varepsilon]}|\zeta_\varepsilon(s)|\,ds+\rho_\varepsilon(T)+$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}\left|\int_0^t[F(\tau,\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)-MF(\tau,\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)]\,d\tau\right|.$$

Отсюда по лемме Гронуолла

$$\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}|\zeta_\varepsilon(t)|\leqslant\exp\{LKT\}[\rho_\varepsilon(T)+$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}\left|\int_0^t[F(\tau,\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot)-MF(\tau,\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)]\,d\tau.\right.\quad (12)$$

Пусть $n = [T/\varepsilon]$ — целая часть

$$\eta_i = \int\limits_i^{i+1} [F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)]\, d\tau,$$

$$i = \overline{0, n-1}.$$

Тогда

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \sqrt{\varepsilon} \int\limits_0^{t/\varepsilon} [F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)]\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}} \sup_{0\leqslant k\leqslant n-1} \left| \sum_{i=0}^{k} \eta_i \right| + \sqrt{\varepsilon} \sup_{0\leqslant i\leqslant n-1} \sup_{t\in[i,i+1]} \left| \int\limits_i^t [F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - \right.$$

$$\left. - MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)]\, d\tau \right|. \tag{13}$$

Из (12) с учетом (13) имеем

$$P\{\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]} |\xi_\varepsilon(t) - X_0^\varepsilon(t)| > \sqrt{\varepsilon} R\} = P\{\sup_{t\in[0,T]} |\zeta_\varepsilon(t)| > R\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0\leqslant k\leqslant n-1} \left| \sum_{i=0}^{k} \eta_i \right| > \frac{r - \delta(\varepsilon)}{\sqrt{T}} \right\} + \sum_{i=0}^{n-1} P\left\{ \sup_{t\in[i,i+1]} \right.$$

$$\left. \left| \int\limits_i^t [F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)]\, d\tau \right| > \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right\}.$$

Отсюда в силу условия (10) теоремы 2 получаем

$$P\{\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]} |\xi_\varepsilon(t) - X_0^\varepsilon(t)| > \sqrt{\varepsilon} R\} \leqslant P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0\leqslant k\leqslant n-1} \right.$$

$$\left. \left| \sum_{i=0}^{k} \eta_i \right| > \frac{r - \delta(\varepsilon)}{\sqrt{T}} \right\} + \frac{T}{\varepsilon} \exp\left\{ -\beta \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} \psi(\beta). \tag{14}$$

Построим экспоненциальную оценку сверху для вероятности

$$P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0\leqslant k\leqslant n-1} \left| \sum_{i=0}^{k} \eta_i \right| > \frac{r - \delta(\varepsilon)}{\sqrt{T}} \right\}.$$

В силу того, что для $z > 0$, $0 < \nu < 1$

$$P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \right| > R \right\} \leqslant \exp\{-zR^\nu\} \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \left(M \left| \frac{z}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \right|^{2s} \right)^{\nu/2} \frac{1}{s!} \right], \tag{15}$$

для построения экспоненциального неравенства достаточно иметь хорошие оценки для моментов сумм.

Из результатов работы [10] в условиях теоремы 2 имеем

$$M \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \right|^{2s} \leqslant \frac{1}{n^s} b(s) L_{2s,x}(\alpha) (M_x)^s, \tag{16}$$

где

$$b(s) = 12\left(1+\frac{4s}{3}\right)(2s-1)\, 9^s C_{2s}^s (2s)!,$$

$$L_{2s,x}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{1-2s/x}(i)\,(i+1)^{s-1}, \quad M_x = \sum_{i=0}^{n-1} (M\,|\eta_i|^x)^{2/x}. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$b(s) \leqslant \frac{36\,(144)^s e^{1/12}\,(s!)^3}{\pi\Gamma(s)}, \quad s \geqslant 1, \tag{18}$$

при $x = 4s$

$$L_{2s,4s}(\alpha) \leqslant \sqrt{C} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\frac{i\alpha}{2}} (i+1)^{s-1} \leqslant \frac{\sqrt{C}\, 2^s \Gamma(s)\, e^{\alpha}}{\alpha^s}, \tag{19}$$

и, наконец,

$$(M_{4s})^s \leqslant \left(\frac{n}{\beta^2}\right)^s \frac{\sqrt{\psi(\beta)}\,(s!)^2}{\sqrt[4]{2\pi^3 s^3}}\, e^{1/96}. \tag{20}$$

Из (17) — (20) следует

$$M\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i\right|^{2s} \leqslant \frac{18\sqrt{C\psi(\beta)}\, e^{\frac{9+96\alpha}{96}}\,(s!)^5}{\sqrt[4]{2\pi^7}} \left(\frac{1152}{\alpha\beta^2}\right)^s. \tag{21}$$

Из (15) и (21) получаем при $\nu = 2/5$, $z > 0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i\right| > R\right\} \leqslant \exp\{-zR^{2/5}\}\Bigg[1 +$$

$$+ \sum_{s=1}^{+\infty} \left(M\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i\right|^{2s}\right)^{1/5} \frac{z^s}{s!}\Bigg] \leqslant \exp\{-zR^{2/5}\} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\sqrt[5]{18}\,\sqrt[10]{C\psi(\beta)}\; e^{\frac{9+96\alpha}{96}}}{\sqrt[20]{2\pi^7}} \sum_{s=1}^{+\infty} \left(27\sqrt[5]{\frac{36}{\alpha\beta^2}}\right)^s\right].$$

Выбирая $z > 0$ таким, чтобы $2z\sqrt[5]{\dfrac{36}{\alpha\beta^2}} = \dfrac{1}{2}$ $\left(z = \dfrac{1}{4}\sqrt[5]{\dfrac{\alpha\beta^2}{36}}\right)$, имеем

$$P\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i\right| > R\right\} \leqslant A \exp\{-BR^{2/5}\}, \tag{22}$$

где

$$A = \frac{\sqrt[5]{18}\,\sqrt[10]{C\psi(\beta)}\exp\left\{\dfrac{9+96\alpha}{480}\right\}}{\sqrt[20]{2\pi^7}}, \quad B = \frac{1}{4}\sqrt[5]{\frac{\alpha\beta^2}{36}}.$$

Далее, пусть $S_k = \sum_{i=0}^{k} \eta_i$, событие A_k такое, что

$A_k = \{|S_i| \leqslant x, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad |S_k| > x\}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad A_0 = \{|\eta_0| > x\}$.

Тогда

$$P\{\sup_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |S_k| > x\} = \sum_{k=0}^{n-1} P\{A_k\}.$$

Обозначим [11] через $\Sigma' P\{A_k\}$ сумму тех слагаемых, для которых $P\{A_k\} > A\exp\{-\gamma n^{\varkappa}\}$, $\gamma > 0$, $\varkappa > 0$. Тогда

$$P\{\sup_{0\leqslant k\leqslant n-1} |S_k| > x\} \leqslant \Sigma' P\{A_k\} + nA\exp\{-\gamma n^{\varkappa}\}. \tag{23}$$

Покажем, что

$$\Sigma' P\{A_k\} \leqslant 2P\{|S_n| > x - \rho\sqrt{n}\} \tag{24}$$

при достаточно большом $\rho > 0$ (выбор обсуждается ниже).

В силу того, что

$$\{|S_n| > x - \rho\sqrt{n}\} \supset \cup'\{|S_n| > x - \rho\sqrt{n}\} \cap A_k \supset$$
$$\supset \cup'\{|S_n| - |S_k| > -\rho\sqrt{n}\} \cap A_k,$$

имеем

$$P\{|S_n| > x - \rho\sqrt{n}\} \geqslant \Sigma' P\{A_k\} P\{|S_n| - |S_k| > -\rho\sqrt{n}/A_k\}. \tag{25}$$

Напомним, что в рассматриваемой сумме $P\{A_k\} \geqslant \exp\{-\gamma n^{\varkappa}\}$, $\gamma > 0$, $\varkappa > 0$ — пока произвольные. Так как

$$P\{|S_n| - |S_k| > -\rho\sqrt{n}/A_k\} \geqslant 1 - P\{|S_n - S_k| \geqslant \rho\sqrt{n}/A_k\}, \tag{26}$$

то, доказав неравенство

$$P\{|S_n - S_k| \geqslant \rho\sqrt{n}/A_k\} \leqslant 1/2, \tag{27}$$

будем иметь из (25) и (26) неравенство (24).

Пусть $0 < \delta < \rho$, r_n — некоторая положительная целочисленная последовательность. Тогда

$$P\{|S_n - S_k| \geqslant \rho\sqrt{n}/A_k\} \leqslant P\{|\eta_{k+r_n+1} + \ldots + \eta_n| \geqslant$$
$$\geqslant (\rho - \delta)\sqrt{n}/A_k\} + P\{|\eta_{k+1} + \ldots + \eta_{k+r_n}| \geqslant \delta\sqrt{n}/A_k\}. \tag{28}$$

При $n - k \leqslant r_n$ в правой части (28) следует оставить лишь последнее слагаемое. Далее, так как в силу (22) имеем

$$P\{|\eta_{k+1} + \ldots + \eta_{k+r_n}| \geqslant \delta\sqrt{n}/A_k\} \leqslant \frac{1}{P\{A_k\}} P\{|\eta_{k+1} + \ldots + \eta_{k+r_n}| \geqslant$$
$$\geqslant \delta\sqrt{n}\} \leqslant \exp\left\{\gamma n^{\varkappa} - \delta^{2/5} B\left(\frac{n}{r_n}\right)^{1/5}\right\}, \tag{29}$$

а в силу условия сильного перемешивания с экспоненциально быстрым перемешиванием $\alpha(m) \leqslant C\exp\{-\alpha m\}$, $\alpha > 0$

$$P\{|\eta_{k+r_n+1} + \ldots + \eta_n| \geqslant (\rho - \delta)\sqrt{n}/A_k\} \leqslant P\left\{|\eta_{k+r_n+1} + \ldots + \eta_n| \geqslant\right.$$
$$\left.\geqslant (\rho - \delta)\sqrt{n - r_n - k}\sqrt{\frac{n}{n - r_n}}\right\} + \frac{1}{P\{A_k\}} C\exp\{-\alpha r_n\} \leqslant$$
$$\leqslant A\exp\{-B(\rho - \delta)^{2/5}\} + \frac{C}{A}\exp\{-\alpha r_n + \gamma n^{\varkappa}\}, \tag{30}$$

то из (28) — (30) при $r_n = [n^{1/6}]$ имеем $\gamma = \alpha[1 - 2^{-1/6}]$, $\delta = \frac{\alpha^3}{B^3}\sqrt{\frac{B}{\alpha}}$, $\varkappa = 1/6$ $\left(\text{очевидно, что при таком выборе справедливо } \gamma n^{\varkappa} < \alpha r_n,\ \gamma n^{\varkappa} < \delta^{2/5} B\left(\frac{n}{r_n}\right)^{1/5}\right)$

$$P\{|S_n - S_k| \geqslant \rho \sqrt{n}/A_k\} \leqslant A \exp\left\{- B\left(\rho - \frac{\alpha^3}{B^3}\sqrt{\frac{B}{\alpha}}\right)^{2/5}\right\} +$$

$$+ \left(1 + \frac{C}{A} e^{\alpha}\right) \exp\{- \alpha 2^{-1/6} n^{1/6}\}. \qquad (31)$$

Величину $\rho > 0$ и номер n_0, начиная с которого выполняется (27), а, стало быть, и величину $\varepsilon > 0$ в каждом конкретном случае нетрудно рассчитать по суммарной оценке правой части (31). Ввиду тривиальности расчета и громоздкости окончательного выражения эти рассуждения опущены.

Окончательно имеем

$$P\{\sup_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |S_k| > 2\rho \sqrt{n}\} \leqslant nA \exp\{- \alpha (1 - 2^{-1/6}) n^{1/6}\} +$$

$$+ 2A \exp\{- B\rho^{2/5}\}. \qquad (32)$$

Из (32) и (14) следует утверждение теоремы 2, если в качестве $\rho > 0$ взять $\rho = \dfrac{r - \delta(\varepsilon)}{\sqrt{T}}$.

Замечание 1. В случае гауссовости процесса

$$\eta_\varepsilon(t, \omega) = F(t, \theta_t X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - MF(t, \theta_t X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)$$

имеем в силу [12] оценку

$$\psi(\beta) = \exp\left\{\beta\left(\sqrt{C_1} + \frac{\beta C_2}{2}\right)\right\}.$$

Здесь

$$K_\varepsilon(t, t) \leqslant C_1 < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} |K_\varepsilon(t, u)| du = \int_0^{+\infty} |K_\varepsilon(t, u)| dt \leqslant C_2 < +\infty,$$

$$K_\varepsilon(t, u) = M\eta_\varepsilon(t)\eta_\varepsilon(u),$$

и

$$\inf_{0 < \beta < +\infty} \exp\{- \beta r\} \psi(\beta) = \exp\left\{- (r - \sqrt{C_1})^2 \frac{1}{2C_2}\right\}, \quad r > \sqrt{C_1}.$$

Замечание 2. Пусть $\eta_\varepsilon(t, \omega)$ — предгауссовский процесс [13]. Тогда найдутся $\beta > 0$ и $\psi(\beta)$ такие, что

$$M \exp\{\beta |\eta_\varepsilon(t)|\} \leqslant \psi(\beta) < +\infty. \qquad (33)$$

Очевидно также, что для тех же $\beta > 0$ справедливо

$$\sup_{i \geqslant 0} M \exp\left\{\beta \int_i^{i+1} |\eta_\varepsilon(t)| dt\right\} \leqslant \sup_{i \geqslant 0} \int_i^{i+1} M \exp\{B |\eta_\varepsilon(t)|\} dt \leqslant \psi(\beta),$$

т. е. условие (10) теоремы 2 выполнено для достаточно широкого класса предгауссовских процессов.

Следует отметить, что для справедливости (33) достаточно, например, выполнимости для $\eta_\varepsilon(t)$ условия Крамера:

$$\sup_{t \geqslant 0} M |\eta_\varepsilon(t)|^m \leqslant \frac{\sigma^2 H^{m-2} m!}{2}, \quad m = 2, 3, \ldots, \sigma^2 > 0, \quad H > 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что в данном случае

$$M \exp\left\{\frac{1}{2H} |\eta_\varepsilon(t)|\right\} \leqslant 1 + \frac{\sigma}{2H} + \frac{\sigma^2}{4H^2},$$

т. е. $\beta = \dfrac{1}{2H}$, $\psi(\beta) = 1 + \sigma\beta + \sigma^2\beta^2$.

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В* Независимые и стационарно связанные величины.— М: Наука, 1965.— 524 с.
2. *Гихман И. И., Кадырова И. А.* Некоторые результаты исследования стохастических дифференциальных уравнений // Теория случайн. процессов.— 1972.— Вып. 1.— С. 57—68.
3. *Хасьминский Р. З.* О случайных процессах, определяемых уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения.— 1966.— **11**, № 2.— С. 240—259.
4. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Там же.— № 3.— С. 444—462.
5. *Бондарев Б. В.* Предельные теоремы для стохастических дифференциальных уравнений и некоторые их применения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Донецк, 1974.— 13 с.
6. *Бородин А. И.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применения.— 1977.— **22**, № 3.— С. 498—512.
7. *Бродский Я. С., Лукачер Б. Я.* Предельные теоремы для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 5.— С. 3—6.
8. *Watanabe H.* Fluctuations in certain dinamical sistems // Stochast. Process. and Appl.— 1985.— **21**, N 1.— P. 147—157.
9. *Бондарев Б. В.* Об усреднении в стохастических системах с зависимостью от всего прошлого // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 4.— С. 443—451.
10. *Утев С. А.* Неравенства для сумм слабо зависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Предельные теоремы для сумм случайных величин.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984.— С. 50—77.
11. *Резник М. Х.* Закон повторного логарифма для некоторых классов стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1968.— **13**, № 4.— С. 642—656.
12. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 368 с.
13. *Дмитровский В. А.* О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1981.— Вып. 25.— С. 154—164.

Донец. ун-т

Получено 30.12.88