УДК 517.946.9.538.3

И. КУРБАНОВ, канд. физ.-мат. наук (Тадж. ун-т, Душанбе)

Разрешимость линейных уравнений Максвелла с памятью

Исследуется разрешимость начально-краевых задач электродинамики проводящих сред с материальными уравнениями вольтерровского типа. Даются новые, отличные от классических, постановки задач. Доказаны теоремы существования и единственности поставленных задач с помощью метода компактности и обобщенного неравенства Гронуолла — Беллмана с кратными интегралами.

Досліджується розв'язність початково-крайових задач електродинаміки провідних середовищ з матеріальними рівняннями вольтерівського типу. Даються нові, відмінні від класичних, постановки задач. Доведені теореми існування і єдиності поставлених задач за допомогою методу компактності і узагальненої нерівності Гронуолла — Беллмана з кратними інтегралами.

1. Рассмотрим задачу определения электромагнитного поля в ограниченной области $Q = (0, l) \times]0, T[$ для сред с памятью. Пусть на границе области заданы напряженности магнитного поля $H(0, t) = 0$, $H(l, t) = 0$. Тогда для определения $H(x, t)$ в непроводящей среде с памятью получим начально-краевые задачи вида [1]

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \psi(t-\tau)\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau\right) + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^t \varphi(t-\tau) H(x,\tau)\,d\tau\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t \left(\psi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau \varphi(\tau-s) H(x,s)\,ds\right)d\tau\right\} \tag{1}$$

с краевыми

$$H(0,t) = 0, \quad H(l,t) = 0 \tag{2}$$

и начальными

$$H(x,0) = H_0(x), \ \partial H(x,0)/\partial t = H_1(x) \tag{3}$$

условиями.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\varepsilon\varphi(0) = -\mu\psi(0)$ *и*

$$H_0 \in W_2^1(0, l), \ H_1 \in L^2_{(0,l)},$$

$$(\varepsilon + \mu)\psi'(0) + \varphi(0)\psi(0) - 1 > 0,$$

$$\varphi(s), \ \psi(s) \in C^2_{[0,T]}, \quad |\psi'(s)| \leqslant \mathrm{const}.$$

Тогда существует функция $H(x, t)$, *удовлетворяющая условиям*

$$H \in L^\infty(0, T: \ W_2^1(0, l)), \tag{4}$$

$$\partial H/\partial t \in L^\infty(0, T; \ L^2_{(0,l)}), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \psi(t-\tau)\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau\right) + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^t \varphi(t-\tau) H(x,\tau)\,d\tau\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t \left(\psi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau \varphi(\tau-s) H(x,s)\,ds\right)d\tau\right\} \tag{6}$$

в $Q = (0, l) \times]0, T[$,

$$H(0,t) = 0, \ H(l,t) = 0, \quad t \in]0, T[,$$

$$H(x,0)=H_0(x),\quad x\in(0,l),$$
$$H_t(x,0)=H_1(x),\quad x\in(0,l).$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом Фаэдо — Галеркина со специальным базисом [2].

Рассмотрим последовательность $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$, обладающую следующими свойствами: $w_i \in W_2^1(0,l)$ $\forall i$, при всех n $w_1, w_2, \ldots, w_n$ линейно независимы.

Определим приближенное решение $H_n(x,t)$ рассматриваемой задачи $H_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n} C_{in}(t)\,w_i(x)$ из системы

$$\left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2},\ w_j\right)-\varepsilon\mu\left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial t^2},\ w_j\right)=\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \psi(t-\right.\right.\right.$$
$$\left.-\tau)\frac{\partial H_n(x,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \varphi(t-\tau)\,H_n(x,\tau)\,d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\int_0^t\left(\psi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau \varphi(\tau-s)\,H_n(x,s)\,ds\right)d\tau\right]\right],\ w_j\right),\qquad j=\overline{1,n},\tag{7}$$

$$H_n(0)=H_{0n},\ \ H_{0n}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}w_i\to H_0 \ \text{в}\ W_2^1(0,l)\ \text{при}\ n\to\infty,$$
$$H_n'(0)=H_{1n},\ \ H_{1n}=\sum_{i=1}^{n}\beta_{in}w_i\to H_1 \ \text{в}\ L^2_{(0,l)}\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Из этих уравнений $H_n(t)$ определяется на отрезке $[0,\ t_n]$, $t_n>0$. Ниже установим априорные оценки для $H_n(t)$, $H_n'(t)$, откуда будет следовать $t_n=T$.

Умножая уравнение (7), соответствующее индексу j, на $C'_{jm}(t)$ и суммируя по j, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\varepsilon\mu\,\|H_n'(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+\|H_n(t)\|^2_{W_2^1(0,l)}+\gamma\,\|H_n(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_0^t G_1(t,\tau)\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau G_2(t,\tau,s)\,ds\,d\tau+|\psi'(t)|\right]\|H_n'(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t G_1(t,\tau)\,\|H_n(\tau)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\tau G_2(t,\tau,s)\,\|H_n(s)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\,ds\,d\tau+$$
$$+\operatorname{const}\|H_{0n}\|^2_{L^2_{(0,l)}},\tag{8}$$

где

$$\gamma=(\varepsilon+\mu)\,\psi'(0)+\psi(0)\,\varphi(0)-1,\quad G_1(t,\tau)=|\,\varepsilon\varphi''(t-\tau)+$$
$$+\mu\psi''(t-\tau)+\psi(0)\,\varphi'(t-\tau)+\varphi(0)\,\psi'(t-\tau)\,|,$$
$$G_2(t,\tau,s)=|\,\psi'(t-\tau)\,\varphi'(\tau-s)\,|.$$

Интегрируя (8) по t, находим

$$\varepsilon\mu\ \|\dot H_n(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+\|H_n(t)\|^2_{W_2^1(0,l)}+\gamma\,\|H_n(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\leqslant\varepsilon\mu\,\|H_{1n}(0)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+$$
$$+\|H_{0n}(0)\|^2_{W_2^1(0,l)}+\gamma\,\|H_{0n}(0)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+\operatorname{const}\|H_{0n}(0)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+$$

$$+\int_0^t N(\tau)\,\| H_n'(\tau)\|^2_{L^2_{(0,l)}}d\tau+\int_0^t\int_0^\tau G_1(\tau,s)\,\| H_n(s)\|^2_{L^2_{(0,l)}}dsd\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^s G_2(\tau,s,\eta)\,\| H_n(\eta)\|^2_{L^2_{(0,l)}}d\eta dsd\tau, \qquad (9)$$

где

$$N(\tau)=\int_0^\tau G_1(\tau,s)\,ds+\int_0^\tau\int_0^s G_2(\tau,s,\eta)\,d\eta ds+|\psi'(\tau)|.$$

Согласно обобщению неравенства Гронуолла — Беллмана [3] из (9) получим оценку

$$\varepsilon\mu\,\| H_n'(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+\| H_n(t)\|^2_{W_2^1(0,l)}+\gamma\,\| H_n(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\leqslant[\varepsilon\mu\,\| H_{1n}(0)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+$$

$$+\| H_{0n}(0)\|^2_{W_2^1(0,l)}+(\gamma+\text{const})\,\| H_{0n}(0)\|^2_{L^2_{(0,l)}}]\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon\mu}\int_0^t[N(\tau)+\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau G_1(\tau,s)\,ds]\,d\tau+\int_0^t\int_0^\tau\int_0^s G_2(\tau,s,\eta)\,d\eta dsd\tau\right\} \qquad (10)$$

при всех $t\in[0,T]$, откуда вытекает, что

$$\varepsilon\mu\,\| H_n'(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+\| H_n(t)\|^2_{W_2^1(0,l)}+\gamma\,\| H_n(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\leqslant\text{const}, \qquad (11)$$

не зависящей от n.

Отсюда следует, что $t_n=T$, а неравенство (11) означает, что при $n\to\infty$

$$H_n \text{ ограничены в } L^\infty(0,T;\,W_2^1(0,l)),$$

$$H_n' \text{ ограничены в } L^\infty(0,T;\,L^2_{(0,l)}).$$

Известно [2], что пространство $L^\infty(0,T;W_2^1(0,l))$ (соответственно $L^\infty(0,T;L^2_{(0,l)})$) является сопряженным к $L^1(0,T;\,W_2^{-1}(0,l))$ (соответственно к $L^1(0,T;\,L^2_{(0,l)})$), значит, из последовательности H_n можно выделить такую последовательность H_k, что

$$H_k\to H \text{ слабо в } L^\infty(0,T;\,W_2^1(0,l)), \qquad (12)$$

$$H_k'\to H' \text{ слабо в } L^\infty(0,T;\,L^2_{(0,l)}). \qquad (13)$$

Кроме того, из (12) и (13), в частности, следует, что H_n ограничены в $L^2(0,T;\,W_2^1(0,l))$, а H_n' — в $L^2(0,T;L^2_{(0,l)})$), откуда вытекает, что H_n принадлежит ограниченному множеству в $W_2^1(Q)$.

Пусть j фиксировано и $k>j$; тогда, переходя к пределу в (7) при $n=k\to\infty$, для всех j находим

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},\,w_j\right)-\varepsilon\mu\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2},\,w_j\right)=\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t\psi(t-\tau)\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau+\right.\right.\right.$$

$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\varphi(t-\tau)\,H(x,\tau)\,d\tau\right)+\int_0^t\left(\psi(t-\tau)\right.\times$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau\varphi(\tau-s)\,H(x,s)\,ds\right)d\tau\right]\right],\,w_j\right),$$

причем последнее равенство выполнено для любого фиксированного $\tilde{t}$.

Отсюда ввиду плотности базиса $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ следует

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, v\right) - \varepsilon\mu\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, v\right) = \left(\left[\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \psi(t-\tau)\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial \tau}d\tau + \right.\right.\right.$$

$$+ \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \varphi(t-\tau)H(x,\tau)d\tau\right) + \int_0^t\left(\psi(t-\tau)\right. \times$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau \varphi(\tau-s)H(x, s)ds\right)d\tau\right]\right], v\right) \quad \forall v \in W_2^1(0, l).$$

Следовательно, H удовлетворяет (6), а также (4), (5). Из (12), (13) в силу теорем о компактности [2] получаем $H_k(0) = H_{0k} \to H_0$ в $W_2^1(0, l)$, $H_k'(0) = H_{1k}'(0) \to H_1$ в $L^2_{(0,l)}$. Поэтому $H(0) = H_0$, $H'(0) = H_1$. Следовательно, условия (3) имеют смысл.

Теорема 2 (единственности). *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда задача* (1)—(3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 — два решения задачи (1)—(3). Тогда разность $w = H_1 - H_2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \psi(t-\tau)\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right) + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_0^t \varphi(t-\tau)w(x,\right.$$

$$\left.\tau)d\tau\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t\left(\psi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau \varphi(\tau-s)w(x,s)ds\right)d\tau\right\}, \tag{14}$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w'(x, 0) = 0.$$

Умножая обе части равенства (14) на w', находим

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, w'\right) - \varepsilon\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, w'\right) = \left(\left[\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \psi(t-\tau)\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau + \right.\right.\right.$$

$$+ \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \varphi(t-\tau)w(x,\tau)d\tau\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t\left(\psi(t-\tau)\right.\right. \times$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau \varphi(\tau-s)w(x,s)ds\right)d\tau\right]\right], w'\right).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\left[\varepsilon\mu\|w'(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}} + \|w(t)\|^2_{W_2^1(0,l)} + \gamma\|w(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_0^t G_1(t,\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^\tau G_2(t,\tau,s)dsd\tau\right]\|w'(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}} +$$

$$+ \int_0^t G_1(t,\tau)\|w(\tau)\|^2_{L^2_{(0,l)}}d\tau + \int_0^t\int_0^\tau G_2(t,\tau,s)\|w(s)\|^2_{L^2_{(0,l)}}dsd\tau.$$

Из этого неравенства на основании обобщения неравенства Гронуолла — Беллмана [3] вытекает

$$\varepsilon\mu\|w'(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}} + \|w(t)\|^2_{W_2^1(0,l)} + \gamma\|w(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}} \leqslant 0,$$

следовательно, $w = 0$.

2. Пусть на границе области проводящей среды с памятью заданы напряженности магнитного поля $H(0, t) = 0$, $H(l, t) = 0$. Пренебрегая током смещения в отношении тока проводимости, получаем начально-краевую задачу вида

$$\sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \varphi(t-\tau) H(x,\tau)\,d\tau\right) + \mu \int_0^t \chi(t-\tau) \times$$

$$\times \frac{\partial H(x,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau + \int_0^t \left(\chi(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \varphi(\tau - s)\,ds\right) d\tau = f(x,t), \qquad (15)$$

$$H(0,t) = 0, \quad H(l,t) = 0, \qquad (16)$$

$$H(x,0) = H_0(x), \qquad (17)$$

где $f(x,t) = \partial J_{\text{ст.}}/\partial x$.

Теорема 3. *Пусть* $\sigma > 0$, $\mu > 0$, $\sigma\varphi(0) + \chi(0) > 0$ и $f(x,t) \in L^2_{(Q)}$, $H_0(x) \in L^2_{(0,l)}$, $\varphi(s)$, $\chi(s) \in C^1_{[0,T]}$, $|\chi(t)| \leqslant \text{const}$ $\forall t \in [0, T]$.

Тогда задача (15) — (17) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Пусть последовательность $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ удовлетворяет следующим свойствам: $w_i \in W^1_2(0, l)$ $\forall i$ *и* для предельного n функции $w_1, w_2, \ldots w_n$ линейно независимы.

Определим $u_n(t) \in [w_1, \ldots, w_n]$ как решение уравнения

$$\sigma\mu\left(\frac{\partial H_n}{\partial t}, w_j\right) - \left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}, w_j\right) + \sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \varphi(t-\tau) H_n(x,\tau)\,d\tau\right], w_j\right) +$$

$$+ \mu\left(\int_0^t \chi(t-\tau) \frac{\partial H_n(x,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau, w_j\right) + \left(\int_0^t \left(\chi(t-\tau) \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \varphi(\tau - s) H_n(x,s)\,ds\right) d\tau, w_j\right) = (f, w_j), \qquad (18)$$

$$u_n(0) = H_{0n} \in [w_1, \ldots, w_n], \quad H_{0n} \to H_0 \text{ в } L^2_{(0,l)} \qquad (19)$$

при $n \to \infty$.

Установим априорные оценки. Умножая уравнение (18), соответствующее индексу j, на $C'_{jm}(t)$ и суммируя по j, получаем

$$\frac{1}{2}\sigma\mu \frac{d}{dt}\|H_n(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}} + \left\|\frac{dH_n(t)}{dx}\right\|^2_{L^2_{(0,l)}} \leqslant (\gamma' + 1)\|H_n(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\int_0^t \widetilde{G}_1(t,\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^\tau \widetilde{G}_2(t,\tau,s)\,ds\,d\tau + |\chi(t)|\right]\|H_n(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{G}_1(t,\tau)\|H_n(\tau)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\tau \widetilde{G}_2(t,\tau,s) \times$$

$$\times \|H_n(s)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\,ds\,d\tau + \frac{1}{2}|\chi(t)|\,\|H_{0n}(0)\|^2_{L^2_{(0,l)}}, \qquad (20)$$

где $\gamma' = \sigma\varphi(0) + \chi(0)$, $\widetilde{G}_1(t,\tau) = \sigma\varphi'(t-\tau) + \varphi(0)\chi(t-\tau) + \mu\chi'(t-\tau)$, $\widetilde{G}_2(t,\tau,s) = \chi(t-\tau)\varphi'(\tau - s)$.

К правой и левой частям (20) прибавим $\| H_n(t) \|^2_{L^2_{(0,l)}}$. Затем, интегрируя полученное неравенство по t, находим

$$\sigma\mu \| H_n(t) \|^2_{L^2_{(0,l)}} + 2 \int_0^t \| H_n(\tau) \|^2_{W^1_2(0,l)} d\tau \leqslant \sigma\mu \| H_{0n}(0) \|^2_{L^2_{(0,l)}} +$$

$$+ \mathrm{const} \| H_{0n}(0) \|^2_{L^2_{(0,l)}} + \| f(t) \|^2_{L^2_{(Q)}} + \int_0^t \widetilde{N}(\tau) \| H_n(\tau) \|^2_{L^2_{(0,l)}} d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\tau \widetilde{G}_1(\tau, s) \| H_n(s) \|^2_{L^2_{(0,l)}} ds d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^s \widetilde{G}_2(\tau, s, \eta) \| H_n(\eta) \|^2_{L^2_{(0,l)}} d\eta ds d\tau,$$

$$\widetilde{N}(\tau) = 2(\gamma' + 1) + \int_0^\tau \widetilde{G}_1(\tau, s) ds + \int_0^\tau \int_0^s \widetilde{G}_2(\tau, s, \eta) d\eta ds d\tau + | \chi(\tau) |.$$

Теперь воспользуемся неравенством Гроноулла — Беллмана [3]

$$\sigma\mu \| H_n(t) \|^2_{L^2_{(0,l)}} + 2 \int_0^t \| H_n(\tau) \|^2_{W^1_2(0,l)} d\tau \leqslant [\sigma\mu \| H_{0n}(0) \|^2_{L^2_{(0,l)}} +$$

$$+ \mathrm{const} \| H_{0n}(0) \|^2_{L^2_{(0,l)}} + \| f \|^2_{L^2_{(Q)}}] \exp \left\{ \frac{1}{\sigma\mu} \int_0^t [\widetilde{N}(\tau) + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau \widetilde{G}_1(\tau, s) ds \right] d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^s \widetilde{G}_2(\tau, s, \eta) d\eta ds d\tau \Big\}. \tag{21}$$

Отсюда вытекает, что

$$\sigma\mu \| H_n(t) \|^2_{L^2_{(0,l)}} + 2 \int_0^t \| H_n(\tau) \|^2_{W^1_2(0,l)} d\tau \leqslant \mathrm{const},$$

где постоянная не зависит от n. Следовательно, $t_n = T$, а неравенство (21) означает, что при $n \to \infty$

$$H_n \text{ ограничены в } L^\infty(0, T; L^2_{(0,l)}).$$

Известно [2, 4], что пространство $L^\infty(0, T; L^2_{(0,l)})$ является сопряженным к $L^1(0, T; L^2_{(0,l)})$, значит, из последовательности H_n можно выделить такую последовательность H_k, что

$$H_k \to H \text{ слабо в } L^\infty(0, T; L^2_{(0,l)}). \tag{22}$$

Переходя к пределу в (18) при $n \to \infty$ и фиксированном j, получаем

$$\left(\sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t}, w_j\right) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, w_j\right) + \left(\sigma \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \varphi(t-\tau) H(x, \tau) d\tau\right], w_j\right) +$$

$$+ \left(\mu \int_0^t \chi(t-\tau) \frac{\partial H(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, w_j\right) + \left(\int_0^t \chi(t-\tau) \times\right.$$

$$\left. \times \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \varphi(\tau - s) H(x, s) ds\right) d\tau, w_j \Big) = (f, w_j). \tag{23}$$

Так как система $\{w_j\}$ полна в $L^2_{(0,l)}$, то (23) справедливо для любой функции $v \in L^2_{(0,l)}$:

$$\left(\sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t}, v\right) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, v\right) + \left(\sigma \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \varphi(t-\tau) H(x, \tau) d\tau\right], v\right) +$$

$$+\left(\mu\int\limits_0^t \chi(t-\tau)\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau,\ v\right)+\left(\int\limits_0^t\left[\chi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau \varphi(\tau-\right.\right.$$

$$\left.\left.-s)\,H(x,s)\,ds\right]d\tau,\ v\right)=(f,v).$$

З а м е ч а н и е. Выполнение краевых и начальных условий проверяется аналогично теореме 1.

Т е о р е м а 4 (е д и н с т в е н н о с т и). *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда задача* (15)—(17) *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H_1 и H_2 — два решения задачи (15)—(17). Тогда разность $w = H_1 - H_2$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma\mu\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^t\varphi(t-\tau)\,w(x,\tau)\,d\tau\right)+\mu\int\limits_0^t\chi(t-\tau)\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\left(\chi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau\varphi(\tau-s)\,w(x,s)\,ds\right)d\tau=0, \tag{24}$$

$$w(x,0)=0.$$

Умножая обе части равенства (24) на w, находим

$$\left(\sigma\mu\frac{\partial w}{\partial t},\ w\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w\right)+\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^t\varphi(t-\tau)\,w(x,\tau)\,d\tau\right)+\mu\int\limits_0^t\chi(t-\tau)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau+\int\limits_0^t\left(\chi(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau\varphi(\tau-s)\,w(x,s)\,ds\right)d\tau\right],\ w\right)=0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\sigma\mu\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+\|w(t)\|^2_{W^1_2(0,l)}\leqslant(\gamma'+1)\|w(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^t\widetilde{G}_1(t,\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\widetilde{G}_2(t,\tau,s)\,ds\,d\tau\right]\|w(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\widetilde{G}_1(t,\tau)\,\|w(\tau)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\widetilde{G}_2(t,\tau,s)\,\|w(s)\|^2_{L^2_{(0,l)}}\,ds\,d\tau.$$

Применяя теперь неравенство Гроноулла — Беллмана, получаем

$$\sigma\mu\|w(t)\|^2_{L^2_{(0,l)}}+2\int\limits_0^t\|w(\tau)\|^2_{W^1_2(0,l)}\,d\tau\leqslant 0,$$

следовательно, $w(x,t)=0$.

1. *Березовский А. А., Курбанов И.* Периодические во времени плоские электромагнитные поля в полупространстве с общими материальными уравнениями // Краевые задачи электродинамики проводящих сред.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 37—57.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.—587 с.
3. *Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лилла С.* Устойчивость движения : Метод интегральных неравенств.— Киев : Наук. думка, 1989.— 271 с.
4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 407 с.

Получено 19.01.90