УДК 519.21

В. И. МАСОЛ, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О распределении числа l-ступеней случайной двоичной последовательности с ограничениями

Изучаются совместное распределение случайных величин $\mu_{kn}(l_1), \ldots, \mu_{kn}(l_s)$ и распределения некоторых функционалов от $\mu_{kn}(l)$ при $n \to \infty$. Здесь $\mu_{kn}(l)$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$,— число l-ступеней двоичной последовательности (д. п.), извлеченной случайно и равновероятно из совокупности всех n-мерных д. п., имеющих заданное число единиц и k 1-ступеней. Под l-ступенью д. п. понимается конфигурация вида $1 \ldots 0$, у которой многоточие заменяет $(l-1)$-мерную д. п.

Вивчаються сумісний розподіл випадкових величин $\mu_{kn}(l_1), \ldots, \mu_{kn}(l_s)$ і розподіли деяких функціоналів від $\mu_{kn}(l)$ при $n \to \infty$. Тут $\mu_{kn}(l)$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$,— число l-східців двійкової послідовності (д. п.), вилучене випадково і рівноймовірно із сукупності всіх n-мірних д. п., що мають задане число одиниць і k 1-сходин. Під l-сходиною д. п. розуміється конфігурація вигляду $1 \ldots 0$, де крапки замінюють $(l-1)$-мірну д. п.

Пусть $\Omega(k, m_0, m_1)$ — совокупность двоичных последовательностей, каждая из которых содержит m_0 нулей, m_1 единиц, $m_0 + m_1 = n$, и k 1-ступеней, $k \geqslant 1$, $m_0 \geqslant k$, $m_1 \geqslant k$.

Лемма 1. *Подмножество $\Omega(k, m_0, m_1, \rho)$ множества $\Omega(k, m_0, m_1)$, состоящее из двоичных последовательностей, имеющих ik i-ступеней, $i = \overline{1, \rho}$, обладает мощностью*

$$|\Omega(k, m_0, m_1, \rho)| = C^k_{m_0-(\rho-1)k} C^k_{m_1-(\rho-1)k}. \tag{1}$$

Доказательство. Число $|\Omega(k, m_0, m_1, \rho)|$ представим в виде

$$|\Omega(k, m_0, m_1, \rho)| = \sum_{\gamma \geqslant 0} c(k, m_1 - \gamma - (\rho-1)k) \sum_{\delta \geqslant 0} c(k, m_0 - \delta - (\rho-1)k),$$

где $c(k, R)$ — количество композиций числа R точно с k частями. Известно [1, с. 67], что $c(k, R) = C_{R-1}^{k-1}$. Используя последние два равенства, приходим к (1). Лемма 1 доказана.

Пусть l, $i = \overline{1, s}$,— целые положительные числа, не зависящие от n; $L = \max(l_1, \ldots, l_s)$, $h = \min(m_0, m_1)$, $H = \max(m_0, m_1)$.

Теорема 1. *Если h и k — конечные константы, не зависящие от n, то имеет место слабая сходимость*

$$(\mu_{kn}(l_1), \ldots, \mu_{kn}(l_s)) \xrightarrow{\omega} (\mu_k(l_1), \ldots, \mu_k(l_s)), \quad n \to \infty,$$

где $\mu_k(l_s)$, $i = \overline{1, s}$,— случайные величины, совместное распределение которых однозначно определяется моментами: при целых $t_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, s}$,

$$M \prod_{i=1}^{s} (\mu_k(l_i))^{t_i} = (C_h^k)^{-1} \sum k! \Big(\prod_{j=0}^{L-1} x_j!\Big)^{-1} C_{h-(L-1)k+G}^{k-X} \prod_{i=1}^{s} (kl_i - J_i)^{t_i}), \tag{2}$$

где суммирование осуществляется по всем решениям в целых неотрицательных числах уравнения $x_0 + x_1 + \ldots + x_{L-1} = k$,

$$X = \sum_{j=0}^{L-2} x_j, \quad G = \sum_{j=0}^{L-2} (L - j - 2)\, x_j, \quad J_i = \sum_{j=0}^{l_i-2} (l_i - j - 1)\, x_j, \quad i = \overline{1, s}.$$

Доказательство. Назовем узлом невозрастающую последовательность, которая начинается с единицы и заканчивается нулем. Очевидно, произвольный элемент f множества $\Omega(k, m_0, m_1)$ содержит точно k узлов; две компоненты последовательности f, образующие l-ступень, могут принадлежать различным узлам. Обозначим $\Delta_{ij}(l)$ число l-ступеней f, каждая из которых содержит одну компоненту в i-м узле и другую компоненту в $(i + j)$-узле, $0 \leqslant i + j \leqslant k$. Пусть γ_i (δ_i) — число единиц (нулей) в i-м узле последовательности f, не образующих 1-ступень, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда, например, для $j = 0$ и $l \geqslant 2$ $\Delta_{ij}(l) = \chi(\gamma_i \geqslant 0, \delta_i \geqslant l - 1) + \chi(\gamma_i \geqslant 1, \delta_i \geqslant l - 2) + \ldots + \chi(\gamma_i \geqslant l - 1, \delta_i \geqslant 0)$, где $\chi(E)$ — индикатор события E. В общем случае для $0 \leqslant j \leqslant k - i$ и $l \geqslant 2$ находим

$$\Delta_{ij}(l) = \sum \Big(\prod_{r=i+1}^{i+j} \chi(\gamma_r = a_r, \delta_{r-1} = b_{r-1}) \Big) \chi(\gamma_i \geqslant a_i, \delta_{i+j} \geqslant b_{i+j}), \tag{3}$$

где суммирование осуществляется по всем решениям в целых неотрицательных числах уравнения $a_i + b_i + a_{i+1} + b_{i+1} + \ldots + a_{i+j} + b_{i+j} = l - 2j - 1$. Соотношение (3) и равенство $|\Omega(k, m_0, m_1)| = C_{m_0}^k C_{m_1}^k$, получаемое из леммы 1 при $\rho = 1$, позволяют представить математическое ожидание случайной величины $(\mu_{kn}(l_1))^{t_1} \ldots (\mu_{kn}(l_s))^{t_s}$ в виде

$$M \prod_{\nu=1}^{s} (\mu_{kn}(l_\nu))^{t_\nu} = (C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \sum \prod_{\nu=1}^{s} \Big(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \Delta_{ij}(l_\nu) \Big)^{t_\nu}, \tag{4}$$

где Σ обозначает суммирование по всем решениям в целых неотрицательных числах уравнений $\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_k = m_1 - k$, $\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_k = m_0 - k$. Оценка

$$(C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \sum \Delta_{ij}(l_\nu) = O(H^{-1}), \quad n \to \infty, \tag{5}$$

где Σ — знак из (4), $1 \leqslant j \leqslant k - i$, $i = \overline{1, k}$, $\nu = \overline{1, s}$, следует из того, что левая часть соотношения (5) удовлетворяет при $n \to \infty$ неравенству

$$(C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \sum \Delta_{ij}(l_\nu) \leqslant A\,(C_H^k)^{-1} \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k = H-k} 1,$$

где A, $0 < A < \infty$,— константа, а среди целых неотрицательных чисел — $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ найдется хотя бы одно, не превышающее l_ν. После возведения каждого сомножителя в правой части (4) в степень t_ν и выполнения умножения по параметру $\nu \in \{1, 2, \ldots, s\}$ получаем при $n \to \infty$ с учетом (5)

$$M \sum_{\nu=1}^{s} (\mu_{kn}(l_\nu))^{t_\nu} = (C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \sum \prod_{\nu=1}^{s} \Big(\sum_{i=1}^{k} \sum_{a_i+b_i=l_\nu-1} \chi(\gamma_i \geqslant a_i, \delta_i \geqslant b_i) \Big)^{t_\nu} + \\ + O(H^{-1}), \tag{6}$$

где сохранены обозначения из соотношения (4). От (6) несложно перейти к (2), если воспользоваться следующими равенствами $\Sigma 1 = C_{h+G-(L-1)k}^{k-X}$, где суммирование осуществляется по всем решениям в целых неотрицательных числах уравнения $\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_k = h - k$, причем x_j компонент среди $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ в каждом решении совпадают с j, $j = \overline{0, L-2}$, а оставшиеся элементы множества $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ принимают значения большие или равные $L - 1$;

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{a=0}^{l_\nu - 1} \chi(\beta_i \geqslant a) = kl_\nu - J_\nu, \quad \nu = \overline{1, s}.$$

Пусть $t_1 = \ldots = t_{j-1} = t_{j+1} = \ldots = t_s = 0$, $t_j \geqslant 0$, тогда, применяя $L - l_j$ раз к правой части (2) формулу свертки Вандермонда [2, с. 17], находим явные выражения для $M(\mu_k(l_j))^{t_j}$, $j = \overline{1, s}$, позволяющие убедиться в справедливости равенства

$$\sum_{t \geqslant 1} \Big(\sum_{j=1}^{s} M(\mu_k(l_j))^t \Big)^{-1/2t} = \infty, \tag{7}$$

выполнение которого достаточно для того, чтобы s-мерное распределение однозначно определялось своими моментами (см., например, [3, с. 167]. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если при $n \to \infty$ $h \to \infty$, $k = \text{const} < \infty$, то имеет место слабая сходимость*

$$(k^{-1}\mu_{kn}(l_1), \ldots, k^{-1}\mu_{kn}(l_s)) \xrightarrow{\omega} (l_1, \ldots, l_s), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Аналогично (6) находим, что при $n \to \infty$ для целых $t_\nu \geqslant 0$, $\nu = \overline{1, s}$,

$$M \prod_{\nu=1}^{s} (\mu_{kn}(l_\nu))^{t_\nu} = (C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \sum \prod_{\nu=1}^{s} \Big(k^{-1} \sum_{i=1}^{k} \sum_{a+b=l_\nu-1} \chi(\gamma_i \geqslant a, \delta_i \geqslant b) \Big)^{t_\nu} + \\ + O(h^{-1}) = \prod_{\nu=1}^{s} l_\nu^{t_\nu} + O(h^{-1}),$$

где Σ — знак из (4). Не вызывающая затруднений проверка равенства (7) завершает доказательство теоремы 2.

Замечание. В теоремах 1 и 2 число k предполагалось фиксированным. Если $k = k(n)$ при $n \to \infty$, то, вообще говоря, зависимость между случайными величинами $\mu_{kn}(l_1), \ldots, \mu_{kn}(l_s)$ усложняется, о чем свидетельствует, в частности, изучение коэффициента корреляции случайных величин $\mu_{kn}(2)$, $\mu_{kn}(3)$, проведенное в теореме 4 (хотя отдельно для $\mu_{kn}(2)$, $\mu_{kn}(3)$ можно получить, например, утверждения типа ЗБЧ при условии, что $k \to \infty$ (см. теорему 3)).

Теорема 3. *Если при $n \to \infty$ $k \to \infty$, $m_0^{-1}k \to q_0$, $m_1^{-1}k \to q_1$, то имеет место слабая сходимость*

$$k^{-1}\mu_{kn}(2) \xrightarrow{\omega} 2 - q_0 - q_1, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

$$k^{-1}\mu_{kn}(3) \xrightarrow{\omega} 3(1 - q_0 - q_1) + (q_0 + q_1)^2, \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Доказательство. Проверим справедливость (9). Для $t \geqslant 0$ математическое ожидание случайной величины $\mu_{kn}^t < (3)$ можно представить в виде

$$M\mu_{kn}^t(3) = (C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \Sigma (A+B)^t, \tag{10}$$

где Σ — знак из (4), $A = a_1 + \ldots + a_k$, $a_i = u_{i1} + u_{i2} + u_{i3}$, $u_{i1} = \chi(\gamma_i \geqslant 2)$, $u_{i2} = \chi(\gamma_i \geqslant 1, \delta_i \geqslant 1)$, $u_{i3} = \chi(\delta_i \geqslant 2)$, $i = \overline{1, k}$, $B = b_1 + \ldots + b_{k-1}$, $b_j = \chi(\delta_j = 0, \gamma_{j+1} = 0)$, $j = \overline{1, k-1}$. В принятых обозначениях находим для целых $t \geqslant 0$ и $r \in \{0, 1, \ldots, t\}$

$$A^r B^{t-r} = r!\,(t-r)! \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant k} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r} \cdot \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{t-r} \leqslant k-1} b_{j_1} \cdot \ldots \cdot b_{j_{t-r}} + O(k^{t-1}), \quad k \to \infty. \tag{11}$$

Для произвольных наборов $\{i_1, \ldots, i_r\}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant k)$

$$a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r} = \sum_{r_1 + r_2 + r_3 = r} \sum{}' \prod_{\nu=1}^{3} \prod_{i \in I_\nu} u_{i\nu}, \tag{12}$$

где знак Σ' обозначает суммирование по всем попарно непересекающимся подмножествам I_1, I_2, I_3 множества $\{i_1, \ldots, i_r\}$, мощности которых соответственно равны r_1, r_2, r_3, $r_1 + r_2 + r_3 = r$. Если $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_{t-r}, j_1 + 1, \ldots, j_{t-r} + 1\} \neq \varnothing$, то

$$b_{j_1} \cdot \ldots \cdot b_{j_{t-r}} \prod_{\nu=1}^{3} \prod_{i \in I_\nu} u_{i\nu} = 0, \tag{13}$$

иначе

$$\sum \left(\prod_{\eta=1}^{t-r} b_{j_\eta} \right) \prod_{\nu=1}^{3} \prod_{i \in I_\nu} u_{i\nu} = \prod_{i=0}^{1} C_{m_i - 2r_{3-2i} - r_2 - t + r}^{k-t+r}. \tag{14}$$

Соотношения (11) — (14) позволяют заключить следующее:

$$(k^t C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \Sigma A^r B^{t-r} \to (q_0 q_1)^{t-r} ((1-q_0)^2 + (1-q_1)^2 + (1-q_0)(1-q_1))^r, \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Используя (10) и (15), получаем при $n \to \infty$

$$k^{-t} M\mu_{kn}^t(3) \to (3(1 - q_0 - q_1) + (q_0 + q_1)^2)^t,$$

что равносильно (9). Аналогично (9) можно проверить (8). Теорема 3 доказана.

Коэффициент корреляции случайных величин μ_{kn} (2), μ_{kn} (3) обозначим через ρ_n. В дальнейшем будем использовать такие сокращения:

$$Q = 2q_1^2 q_0^2 + q_1(1-q_1) f(q_1, q_0) + q_0(1-q_0) f(q_0, q_1),$$

$$f(q_1, q_0) = 5 - 7q_0 + 4q_0^2 - q_0^3 - q_1(3q_0^2 - 15q_0 + 14) + q_1^2(13 - 8q_0) - 4q_1^3,$$

$\varepsilon_i = m_i - k$, $i \in \{0, 1\}$, $o(1)$ — величина, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть при $n \to \infty$ $h \to \infty$, $m_1^{-1}k \to q_1$, $m_0^{-1}k \to q_0$. Тогда*

1) *если справедливо хотя бы одно из соотношений $q_1 \in (0, 1)$, $q_0 \in (0, 1)$, то $\rho_n \to 2(1 - q_1 - q_0)((q_1(1-q_1)^2 + q_0(1-q_0)^2)/Q)^{1/2}$, $n \to \infty$;*

2) *$\rho_n \to 2/\sqrt{5}$, $n \to \infty$, при условии $q_1 = q_0 = 0$;*

3) *$\rho_n \to 0$, $n \to \infty$, при условии $q_1 = q_0 = 1$;*

4) *если $q_i = 1$, $q_{1-i} = 0$ и при $n \to \infty$ $m_{1-i} m_i^{-3} \to \nu$, $\varepsilon_i \to \varepsilon$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=\begin{cases}\varepsilon\nu/((1+\varepsilon\nu)(1+\varepsilon^2\nu))^{1/2}, & \text{если } \nu<\infty,\ 0\leqslant\varepsilon<\infty,\\ 1/\sqrt{\varepsilon}, & \text{если } \nu=\infty,\ 1\leqslant\varepsilon<\infty,\\ 0, & \text{если либо } \varepsilon=\infty, \text{ либо } \varepsilon=0,\ \nu=\infty,\end{cases}$$

где $i\in\{0, 1\}$.

Доказательство теоремы 4 может быть получено с помощью лемм 2—4.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* 1—4 *теоремы* 4. *Тогда дисперсия случайной величины* $\mu_{kn}(3)$ *удовлетворяет соответственно соотношениям*

1) $D\mu_{kn}(3)=kQ(1+o(1)),\ n\to\infty$, *где* $Q>0$;
2) $D\mu_{kn}(3)=5k^2n(1+o(1))/m_1m_0;\ n\to\infty$;
3) $D\mu_{kn}(3)=n(1+o(1)),\ n\to\infty$;
4) *при* $n\to\infty$

$$D\mu_{kn}(3)=\begin{cases}m_i^2(1+\varepsilon\nu+o(1))/m_{1-i}, & \text{если } \nu<\infty,\ 0\leqslant\varepsilon<\infty,\\ \varepsilon(1+o(1))/m_i, & \text{если } \nu=\infty,\ 1\leqslant\varepsilon<\infty,\\ \left(\dfrac{m_i^2}{m_{1-i}}+\dfrac{\varepsilon_i^3}{m_i^2}+\dfrac{\varepsilon_i}{m_i}\right)(1+o(1)), & \text{если } \varepsilon_i^2m_{1-i}m_i^{-3}\to\mu,\ n\to\infty,\\ & \text{и } \mu=\varepsilon=\infty,\\ m_i^2(1+o(1))/m_{1-i}, & \text{если либо } \mu<\infty,\ \varepsilon=\infty, \text{ либо } \varepsilon=0,\ \nu=\infty,\end{cases}$$

здесь $i\in\{0, 1\}$.

Доказательство. Неравенство из 1 следует из того, что если $q_1\in(0,1)$ $(q_0\in(0, 1))$, то функция $\varphi(q_1)=f(q_1, q_0)$ $(\varphi(q_0)=f(q_0, q_1))$ не обращается в 0 при $q_0\in[0, 1]$ $(q_1\in[0, 1])$. Обоснование оставшихся соотношений леммы 2 нетрудно осуществить, исходя от выражения (10) для моментов случайной величины $\mu_{kn}(3)$.

Лемма 3. *Для* $m_0\geqslant 3$, $m_1\geqslant 3$ *ковариация случайных величин* $\mu_{kn}(2)$, $\mu_{kn}(3)$ *удовлетворяет равенству* $\operatorname{Cov}(\mu_{kn}(2), \mu_{kn}(3))=\Phi(m_1, m_0)+\Phi(m_0, m_1)$, *где* $\Phi(m_1, m_0)=k^2(1-km_1^{-1})[(m_1-2)^{-1}(1-k(m_1-1)^{-1})\times(1-2km_1^{-1})+(m_1-1)^{-1}(1-km_1^{-1})(1-(2k-1)m_0^{-1})]$.

Доказательства леммы 3 и последующей леммы 4, заключающиеся в преобразовании соответственно выражений $\Sigma(A+B)C-\Sigma(A+B)\Sigma C$, $\Sigma C^2-(\Sigma C)^2$, в записи которых использованы обозначения из (10), $C=\sum_{i=1}^{k}(\chi(\gamma_i\geqslant 1)+\chi(\delta_i\geqslant 1))$, не вызывают затруднений.

Лемма. 4. *Для* $m_0\geqslant 2$, $m_1\geqslant 2$ *дисперсия случайной величины* $\mu_{kn}(2)$ *удовлетворяет равенству* $D\mu_{kn}(2)=k^2[(m_1-1)^{-1}(1-km_1^{-1})^2+(m_0-1)^{-1}\times(1-km_0^{-1})^2]$.

Всюду далее μ будет обозначать случайную величину, распределение которой однозначно определяется моментами; t (с индексами или без них)—целое число. Положим $\xi_n=h^{-1}\max_{t_1\leqslant l\leqslant t_2}\mu_{1n}(l)$, $1\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant n-1$. Легко убедиться в справедливости леммы 5.

Лемма 5. *Для* $s\geqslant 0$ *математическое ожидание случайной величины* ξ_n^s *удовлетворяет соотношению*

$$M\xi_n^s=H^{-1}h^{-s-1}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{H}\{t_2\chi(\min(i, \bar{j})>t_2)+\min(i, \bar{j})[\chi(t_1\leqslant\min(i, \bar{j})\leqslant t_2)+$$

$$+\chi(\min(i, \bar{j})<t_1, \max(i, \bar{j})\geqslant t_1)]+\max(0, i+\bar{j}-t_1)\chi(t_1>\max(i, \bar{j}))\}^s.$$

Используя лемму 5 и метод моментов, несложно получить доказательства теорем 5—8.

Теорема 5. *Пусть* $t_1\leqslant h\leqslant t_2$. *Тогда*

1) *если при* $n\to\infty$

$$H^{-1}h\to\lambda, \tag{16}$$

$$h^{-1}t_1 \to g_1, \tag{17}$$

$$h \to \infty, \tag{18}$$

то $\xi_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где для* $s > 0$ $M\mu^s = (s+1)^{-1}(1-\lambda(s+g_1^{s+2})(s+2)^{-1})$:

2) *если*

$$h = \text{const} < \infty, \tag{19}$$

то $\xi_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где для* $s \geqslant 0$ $M\mu^s = h^{-s-1} \sum_{i=1}^{h} i^s$.

Теорема 6. *Пусть* $h \leqslant t_1 \leqslant H$. *Тогда*

1) *если выполняются условия* (16), (18) *и*

$$H^{-1}t_1 \to g, \quad n \to \infty, \tag{20}$$

то $\xi_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где для* $s > 0$ $M\mu^s = (s+1)^{-1}(\lambda(s+2)^{-1} - g + 1)$;

2) *если выполняются условия* (19) *и* (20), *то* $\xi_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где для* $s > 0$ $M\mu^s = h^{-s-1}(1-g)\sum_{i=1}^{h} i^s$.

Теорема 7. *Пусть* $t_2 \leqslant h$. *Тогда*

1) *если выполняются условия* (16) — (18) *и* $h^{-1}t_2 \to g_2$, $n \to \infty$, *то* $\xi_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где при* $s > 0$

$$M\mu^s = \lambda(s+1)^{-1}(s+2)^{-1}((g_2-g_1)^{s+2} - g_2^{s+2}(2s+3)) + (s+1)^{-1} \times$$
$$\times g_2^{s+1}(1+\lambda) + (1-\lambda g_2)(1-g_2)g_2^s;$$

2) *если выполняются условия* (19) *и* $t_2 = \text{const} < \infty$, *то* $\xi_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где для* $s \geqslant 0$ $M\mu^s = (1-h^{-1}t_2)(t_2/h)^s + h^{-s-1}\sum_{i=1}^{t_2} i^s$.

Теорема 8. *Пусть* $H \leqslant t_1$. *Тогда если при* $n \to \infty$ $(n-t_1)h^{-1} \to \nu_0$, $(n-t_1)H^{-1} \to \nu_1$, *то* $\xi_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где при* $s > 0$ $M\mu^s = \nu_0\nu_0^{s+1}(s+1)^{-1} \times$ $\times (s+2)^{-1}$.

Положим $\zeta_n = (hH)^{-1}\sum_{l \leqslant t} \mu_{1n}(l)$.

Лемма 6. *Для* $s \geqslant 0$ *и* $1 \leqslant t \leqslant n-1$ *математическое ожидание случайной величины* ζ_n^s *удовлетворяет соотношению*

$$M\zeta_n^s = (hH)^{-s-1}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{H}\Big\{2^{-1}\min(t, \min(i, j))(1+\min(t, \min(i, j))) +$$
$$+ \max(0, \min(t, \max(i, j)) - \min(i, j))\min(i, j) + \Sigma(i+j-\nu)\Big\}^s,$$

где знак Σ *обозначает суммирование по параметру* $\nu \in [1+\max(i, j), \min(t, i+j)]$.

Доказательство. Пусть узел содержит i единиц и j нулей. Отрезок $[1, t]$ разделим на три интервала $[1, \min(t, \min(i, j))]$, $[\min(t, \min(i, t)) + 1, \min(t, \max(i, j))]$, $[\min)t, \max(i, j)) + 1, \min(t, i+j)]$. Сумма чисел l-ступеней равняется

$$\sum_{l=1}^{\min(t, \min(i, j))} l, \; \max(0, \min(t, \max(i, j)) - \min(i, j))\min(i, j),$$

$$\sum_{l=1+\max(i, j)}^{\min(t, i+j)} (i+j-l),$$

если параметр l изменяется соответственно в первом, втором и третьем интервалах. Теперь завершение доказательства леммы 6 не вызывает затруднений.

Теорема 9. *Пусть* $1 \leqslant t \leqslant h$. *Тогда*

1) *если* $t = \mathrm{const} < \infty$, *то* $sn \to 0$, $n \to \infty$;

2) *если при* $n \to \infty$ $t \to \infty$, $h^{-1} t \to \varphi$,

$$H^{-1} t \to \Theta, \tag{21}$$

то $\zeta_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где для целых* $s \geqslant 0$

$$M\mu^s = (\Theta\varphi)^s \Big\{\Theta\varphi (s+1)^{-2} (C_{2(s+1)}^{s+1})^{-1} + (\Theta + (1-2\Theta)\varphi) \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu (-2)^{-\nu} \times$$

$$\times (s+\nu+1)^{-1} + (1-\Theta)(1-\varphi) 2^{-s} + \Theta\varphi \sum_{\substack{s_1+\ldots+s_4=s,\\ s_i\geqslant 0,\, i=1,\ldots,4}} s! (s_1! \cdot \ldots \cdot s_4!)^{-1} \times$$

$$\times (-1)^{s_2} (-2)^{-s_4} (2s - s_1 + 2)^{-1} (s_3 + 2s_4 + 1)^{-1}\Big\}.$$

Доказательство. Используя лемму 6, находим

$$M\zeta_n^s = (hH)^{-s-1} \Big\{\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t-i} (ij)^s + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=t-i+1}^{t} (ij - 2^{-1}(i+j-t-1) \times$$

$$\times (i+j-t))^s + (n-2t) \sum_{i=1}^{t} i^s (t - 2^{-1}(i-1))^s + (h-t)(H-t) \times$$

$$\times (2^{-1} t (t+1))^s\Big\}.$$

С помощью последнего равенства, полиномиальной формулы и соотношений

$$\sum_{i=1}^{n} i^s = n^{s+1}(1 + O(1/n))/(s+1), \quad n \to \infty, \quad \sum_{i=0}^{s+1} (-1)^i C_{s+1}^i (s+i+1)^{-1} =$$

$$= 1/(s+1) C_{2(s+1)}^{s+1}$$

[4, с. 611] несложно завершить доказательство теоремы 9.

Теорема 10. *Пусть* $h \leqslant t \leqslant H$. *Тогда*

1) *если выполняются условия* (19) *и* (21), *то* $\zeta_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где для* $s \geqslant 0$ $M\mu^s = \Theta^s h^{-s-1} (1 - \Theta s (s+1)^{-1}) \sum_{i=1}^{h} i^s$;

2) *если* $t = \mathrm{const} < \infty$, *то* $\zeta_n \xrightarrow{\omega} 0$, $n \to \infty$;

3) *если выполняются условия* (18), (21) *и* $t^{-1} h \to d$, $n \to \infty$, *то* $\zeta_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где при целых* $s \geqslant 0$

$$M\mu^s = \Theta^s \Big\{(1-\Theta) \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu (-d/2)^\nu (s+\nu+1)^{-1} + \Theta (s+1)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{s+1} C_{s+1}^\nu (-d)^\nu (s+\nu+1)^{-1} + \Theta \sum_{\substack{s_1+\ldots+s_4=s\\ s_i\geqslant 0,\, i=1,\ldots,4}} s! (s_1! \cdot \ldots \cdot s_4!)^{-1} (-1)^{s_2} \times$$

$$\times d^{s-s_1+1} (-2)^{-s_4} (2s - s_1 + 2)^{-1} (s_3 + 2S_4) + 1)^{-1}\Big\}.$$

Теорема 11. *Пусть* $H \leqslant t \leqslant n-1$. *Тогда*

1) *если выполняется условие* (19), *то* $\zeta_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где при* $s \geqslant 0$ $M\mu^s = h^{-s-1}(s+1)^{-1} \sum_{i=1}^{h} i^s$;

2) *если выполняются условия* (18) *и* $t^{-1}h \to 0$, $n \to \infty$, *то* $\zeta_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где при целых* $s \geqslant 0$ $M\mu^s = (s+1)^{-2}$;

3) *если выполняются условия* (18), (21), $t^{-1}h \to d$, $n \to \infty$, $d > 0$, *то* $\zeta_n \xrightarrow{\omega} \mu$, $n \to \infty$, *где при целых* $s \geqslant 0$

$$M\mu^s = ((\Theta - 1)/\Theta d)^{s+1}(s+1)^{-2} + d^{-s-1}(s+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^{s+1} C_{s+1}^{\nu}(-\Theta)^{-\nu} \times$$

$$\times (s+\nu+1)^{-1}((\Theta d)^{s+\nu+1} - (\Theta - 1)^{s+\nu+1}) + (\Theta d)^{-s-1} \times$$

$$\times \sum_{\substack{s_1+\ldots+s_6=s,\\ s_i \geqslant 0,\, i=1,\ldots,6}} s!\,(s_1! \cdot \ldots \cdot s_6!)^{-1}(-1)^{s_3}(1 + \Theta d - \Theta)^{2(s+1-s_1)-s_2-s_5}(-2)^{-s_6} \times$$

$$\times (\Theta - 1)^{s_1+s_5}(2 - \Theta)^{s_2}((2(s - s_1) - s_2 - s_5 + 2)(s_4 + s_5 + 2s_6 + 1))^{-1}.$$

Доказательство теорем 10 и 11 можно осуществить аналогично доказательству теоремы 9.

1. *Эндрюс Г.* Теория разбиений.— М. : Наука, 1982.— 256 с.
2. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества.— М. : Наука, 1982.— 256 с.
3. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.— М. : Наука, 1987.— 400 с.
4. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды.— М. : Наука, 1981.— 800 с.

Получено 11.05.89