

## ПРО ОДНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ В $\mathbb{R}^m$ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІОНАЛУ ТИПУ ЛОКАЛЬНОГО ЧАСУ НА ПОВЕРХНІ

The transformation of Wiener's process  $\xi_t$  in  $\mathbb{R}^m$  is considered by using the multiplicative functional  $\alpha_t = u(\xi_t) / u(\xi_0)$ , where the function  $u$  is similar to a local time type functional on a surface. It is proved that such a transformation is equivalent to a successive application of absolutely continuous change of measure and killing on a surface.

Розглянуто одне перетворення вінерівського процесу  $\xi_t$  в  $\mathbb{R}^m$  за допомогою мультиплікативного функціоналу  $\alpha_t = u(\xi_t) / u(\xi_0)$ , де функція  $u$  деяким чином влаштована за функціоналом типу локального часу на поверхні. Доведено, що таке перетворення еквівалентне послідовному застосуванню абсолютно неперервної заміни міри і вбивання на поверхні.

Нехай  $(\xi_t, \mathcal{F}_t, P_x)$  — вінерівський процес в  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ , з ймовірністю переходу

$$P(t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma} g(t, x, y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \Gamma \in \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m);$$

де

$$g(t, x, y) = (2\pi t)^{-m/2} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2t}\right\},$$

$S$  — обмежена замкнена поверхня Ляпунова [1] в  $\mathbb{R}^m$ . Покладемо

$$\mu_S(\Gamma) = \int_{S \cap \Gamma} \nu(y) d\sigma_y, \quad \Gamma \in \mathfrak{B},$$

де  $\nu$  — деяка неперервна невід'ємна функція на  $S$ ,  $\mu_S$  —  $W$ -міра, якій відповідає  $W$ -функціонал від вінерівського процесу  $\xi_t$  [2]. Такий функціонал можемо записати у вигляді

$$\eta_t = \int_0^t \nu(\xi_\tau) \delta_S(\xi_\tau) d\tau,$$

де  $\delta_S$  визначається співвідношенням

$$\int_{\mathbb{R}^m} \delta_S(x) h(x) dx = \int_S h(x) d\sigma_x$$

$h$  — довільна неперервна фінітна функція,  $\sigma$  — поверхнева міра Лебега на  $S$ . Крім того, існує границя  $\eta_\infty = \lim_{t \uparrow \infty} \eta_t$  і функція  $u(x) = M_x e^{\eta_\infty}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ , є розв'язком інтегрального рівняння

$$u(x) = 1 + C_m \int_S u(y) \nu(y) |x-y|^{2-m} d\sigma_y,$$

де  $C_m = \Gamma(m/2) / (m-2)\pi^{m/2}$ . Зрозуміло, що  $u(x) \geq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in C(\mathbb{R}^m)$ ,  $u \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus S)$ . Функція  $u$  є експесивною [3] і тому можливе перетворення процесу  $\xi_t$  за допомогою мультиплікативного функціоналу  $\alpha_t = u(\xi_t) / u(\xi_0)$ ,  $t \geq 0$ . Ймовірність процесу після такого перетворення задається формулою

$$\tilde{P}(t, x, \Gamma) = M_x \chi_{\Gamma}(\xi_t) \alpha_t = \frac{1}{u(x)} \int_{\Gamma} g(t, x, y) u(y) dy.$$

Звідси одержуємо вираз для напівгрупи операторів  $\tilde{T}_t = (1/u)T_t u$ , де  $u$  означає оператор множення на функцію  $u(x)$ .

Позначимо

$$c(t, x) = \frac{1}{t}(1 - \tilde{P}(t, x, \mathbb{R}^m)), \quad a^i(t, x) = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^m} (y^i - x^i) \tilde{P}(t, x, dy), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$b^{ij}(t, x) = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^m} (y^i - x^i)(y^j - x^j) \tilde{P}(t, x, dy), \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

і для довільної  $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$  розглянемо

$$C(\varphi) = \lim_{t \downarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} c(t, x) \varphi(x) dx,$$

$$A^i(\varphi) = \lim_{t \downarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} a^i(t, x) \varphi(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$B^{ij}(\varphi) = \lim_{t \downarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} b^{ij}(t, x) \varphi(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Оскільки, як легко побачити, для кожного  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$  справедливі рівності

$$\lim_{t \downarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^m} (u(x) - u(y)) g(t, x, y) dy dx = - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} u(y) \Delta \varphi(y) dy,$$

$$\lim_{t \downarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^m} u(y) (y^i - x^i) g(t, x, y) dy dx = - \int_{\mathbb{R}^m} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i} dx,$$

$$\lim_{t \downarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^m} u(y) (y^i - x^i)(y^j - x^j) g(t, x, y) dy dx = \delta_{ij} \int_{\mathbb{R}^m} u(x) \varphi(x) dx,$$

то, використовуючи теорему Банаха — Штейнгауза, критерій слабкої збіжності послідовності лінійних неперервних функціоналів і всюди щільність  $C_0^\infty$  в  $C_0$ , одержуємо  $\forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$

$$C(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} v(x) \delta_S(x) \varphi(x) dx = \int_S v(x) \varphi(x) d\sigma_x,$$

$$A^i(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{u(x)} \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} \varphi(x) dx, \quad B^{ij}(\varphi) = \delta_{ij} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx.$$

Зауважимо, що добуток узагальненої функції  $f$  із  $C_0'$  на довільну неперервну функцію  $g$  визначається як такий функціонал над  $C_0$ , що  $\forall \varphi \in C_0$   $(fg, \varphi) = (f, g\varphi)$ .

Отже, одержаний процес є узагальненим дифузійним процесом в  $\mathbb{R}^m$  [4] з вектором переносу  $\nabla u(x)/u(x)$ , одиничною матрицею дифузії і коефіцієнтом обриву  $v(x)\delta_S(x)$ . Покажемо, що такий же процес можна одержати, відправляючись від вінерівського процесу, за два кроки: абсолютно неперервна заміна міри і убивання на поверхні  $S$ .

З теорії потенціалів [1] випливає, що функція  $r(x) = \nabla u(x)/u(x)$  обмежена

Используя лемму 1 убеждаемся, что

$$M \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \text{Sp} \frac{\partial a}{\partial \xi_i} \right) - \frac{m}{n} a \right|^2 = O \left( \sum k_{\alpha\beta}^2 n^{N-2} m^{(l+1)/2} \right).$$

Отсюда и следует доказательство леммы.

Введем оператор  $A^{0*}$ , сопряженный к  $A^0$ . Он переводит подпространство  $\hat{P}_l(n)$  на  $\hat{P}_{l-2}(n)$  по следующему правилу: если для  $a$  в представлении (3), (4)  $\sum (k_{is} + k_{si}) = 1$ , т. е.  $a = \sum_{i=1}^n (b_i, \xi_i) \xi_i$ , где  $b_i$  не зависит от  $\xi_i$ , то  $A^{0*}a = \sum_{i=1}^n b_i$ , а если  $a$  вида (3), (4) такого представления не допускает, то  $A^{0*}a = 0$ .

В силу изложенного справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $l_n$  таково, что  $l_n^2/n \rightarrow 0$ ,  $m/n$  ограничено. Тогда для  $a \in \bigoplus_{i=1}^{l_n} \hat{P}_i(n)$

$$\| Aa - A^0a - A^{0*}a - \left( 1 + \frac{m}{n} \right) a \| = o(\| a \|).$$

Таким образом, на указанном подпространстве оператор  $A^0 + A^{0*} + \left( 1 + \frac{m}{n} \right) I$  является "главной" частью оператора  $A$ .

1. Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R. On limit of the largest eigenvalue of the large dimensional sample covariance matrix // Jech. Rep. – 1984. – № 84 – 44. – P. 14.
2. Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R. On limit of the largest eigenvalue of the large dimensional sample covariance matrix // Probab. Theory and Related Fields. – 1988. – 78, № 4. – P. 509 – 521.
3. Yin Y. Q., Krishnaiah P. R. Limit theorem for the eigenvalues of the sample covariance matrix when the underlying distribution is isotropic // Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – 30, № 4. – С. 810 – 816.
4. Скороход А. В., Степаню В. И. Об одном обобщении полиномов Эрмита // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, № 11. – С. 1524 – 1528.
5. Скороход А. В., Степаню В. И. Центральная предельная теорема для полиномов Эрмита от независимых гауссовых величин // Там же. – № 12. – С. 1681 – 1686.

Получено 16. 05. 91