УДК 517.925.34

Е. В. Воскресенский, канд. физ.-мат. наук (Мордов. ун-т, Саранск)

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛЯПУНОВА

We consider the groups of transformations, which have the main asymptotic characteristics of differential equations as their invariants.

Розглянуті групи перетворень, серед інваріантів яких містяться основні асимптотичні характеристики диференціальних рівнянь.

1. Классификация Ляпунова линейных однородных дифференциальных уравнений играет важную роль в теории асимптотического интегрирования. Она выполнена с помощью специальной группы (G_0, Ξ_0) преобразований L: $R^n \to \to R^n$, где $\| L \|$, $\| L^{-1} \|$, $\| \dot{L} \| \le K$. В дальнейшем оператор L и его матрицу будем обозначать одной и той же буквой. Ограниченность матрицы $\dot{L}$ играет не принципиальную роль. Поэтому часто это условие опускается, учитываются лишь первые два [1, 2].

Расширим группу (G_0, Ξ_0), где Ξ_0 — множество линейных однородных дифференциальных уравнений одного порядка с непрерывной ограниченной матрицей на множестве $[T, +\infty)$. Пусть Ξ — множество дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f \in C^{(p,q)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, p, $q \ge 0$, G — множество всех преобразований φ: $\Xi \to \Xi$ таких, что если $y = \varphi(t, x)$, то существуют $x = \varphi^{-1}(t, y)$ и $\| \varphi(t, x) \| \le \le D_1 \| x \|$, $\| \varphi^{-1}(t, y) \| \le D_2 \| y \|$ при всех $t \ge T$, $x, y \in R^n$, $D_i \ge 0$, $i = 1, 2$. Кроме того, будем считать, что $\varphi \in C^{(p,q)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, p, $q \ge 1$. Группу (G, Ξ) будем называть группой преобразований Ляпунова. Если уравнение (1) с помощью преобразования Ляпунова $y = \varphi(t, x)$ преобразуется в уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f_0(t, y), \tag{2}$$

то будем говорить, что уравнение (1) приводимо к уравнению (2).

Так как $\varphi(t, \varphi^{-1}(t, y)) \equiv y$ и $\varphi^{-1}(t, \varphi(t, x)) \equiv x$, то существуют непрерывные матрицы $[\partial\varphi / \partial x]^{-1}$ и $[\partial\varphi^{-1} / \partial y]^{-1}$.

2. Перейдем к вопросу о приводимости в случае, когда сначала оба уравнения являются нелинейными. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \varphi(t, x) \tag{3}$$

и

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{4}$$

где $f, \varphi \in C^{(p,q)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, $p \ge 0$, $q \ge 2$, $\| \varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2) \| \le K(t) \times \times \| x_1 - x_2 \|$ для любых $x_1, x_2 \in R^n$, $f(t, 0) \equiv \varphi(t, 0) \equiv 0$.

Предположим, что для уравнения (4) справедливы неравенства

$$\left\| \frac{\partial y(t:\ t_0, y_0)}{\partial y_0} \right\| \le K_0(t_0)\, e^{\alpha_0(t - t_0)}, \quad T \le t < t_0, \tag{5}$$

$$\left\| \frac{\partial y(t:\ t_0, y_0)}{\partial y_0} \right\| \le K_1(t_0)\, e^{\alpha_1(t-t_0)}, \qquad t \ge t_0, \tag{6}$$

при всех $y_0 \in R^n$, $t_0 \ge T$.

Решения уравнений (3) и (4) связаны формулой Алексеева [3]

$$x(t:\ t_0, x_0) = y(t:\ t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{\partial y(t:\ s, x(s))}{\partial x_0} \right\| \varphi(s, x(s))\, ds, \qquad t \ge t_0.$$

Тогда

$$\| x(t) \| \le K_1(t_0)\, e^{\alpha_1(t-t_0)} \| x(t_0) \| + \int_{t_0}^{t} K_1(s)\, e^{\alpha_1(t-s)} K(s) \| x(s) \|\, ds.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\| x(t) \| \le K_1(t_0)\, e^{\alpha_1(t-t_0)} \| x(t_0) \| \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} K_1(s)\, K(s)\, ds \right\}, \qquad t \ge t_0.$$

Из справедливости равенства

$$\int_{t_0}^{+\infty} K_1(s)\, K(s)\, ds = D < +\infty \tag{7}$$

вытекает оценка

$$\| x(t: t_0, x_0) \| \le D\, K_1(t_0) \| x(t_0) \|\, e^{\alpha_1(t-t_0)}, \qquad t \ge t_0.$$

Теорема 1. *Пусть для уравнений* (3) *и* (4) *выполняются условия* (5) – (7). *Тогда если*

$$D\, K_1(t)\, e^{(\alpha_0-\alpha_1)t} \int_{t_0}^{+\infty} e^{(\alpha_1-\alpha_0)s} K_0(s)\, K(s)\, ds = q < 1, \qquad t \ge t_0,$$

то преобразованием Ляпунова

$$y = x + \int_{t}^{+\infty} \left\| \frac{\partial y(t:\ s, x(s))}{\partial x} \right\| \varphi(s, x(s))\, ds \tag{8}$$

уравнение (3) *приводимо к уравнению* (4).

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$L\, x(t) = x(t) + \int_{t}^{+\infty} \left\| \frac{\partial y(t:\ s, x(s))}{\partial x} \right\| \varphi(s, x(s))\, ds, \qquad x(s) = x(s: t, x(t)), \quad s \ge t,$$

где

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t: t_0, x_0) \in B_{\alpha_1} = \{ x(t):\ x \in C(R^1_+, R^n),$$

$$\| x(t: t_0, x_0) - x(t: t_0, x_1) \| \le D \| x_0 - x_1 \|\, e^{\alpha_1(t-t_0)}, \quad t \ge t_0 \}$$

и $0 \in B_{\alpha_1}$. Тогда оператор $L: R^n \to R^n$ определен корректно и $\| L\, x(t) \| \le (1 + q) \| x(t) \|$, $t \ge t_0$. Кроме того, на основании [1, с. 508] существует обратный оператор L^{-1} и $\| L^{-1} x(t) \| \le D_2 \| x(t) \|$, $t \ge t_0$, $D_2 > 0$. В работе [4] (теорема 3.1) доказано, что если x — решение уравнения (3), то y из равенства (8) — решение уравнения (4), и наоборот: если y — решение уравнения (4), то x — решение уравнения (3). Следовательно, (8) — преобразование Ляпунова, переводящее уравнение (3) в уравнение (4). Теорема 1 доказана.

Если сузим множество Ξ, то группа преобразований может приобрести новые свойства. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \tag{10}$$

где

$$A(\cdot)\colon [T, +\infty) \to \operatorname{Hom}(R^n, R^n), \quad f \in C^{(0,1)}(R^1_+ \times R^n, R^n),$$

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \le \psi(t) \| x_1 - x_2 \|, \quad 0 \le \psi(t) \le K_1, \quad \psi \in C(R^1_+, R^1_+),$$

$$\| A(t) \| \le K_1, \quad t \ge T, \quad \forall\, x_1, x_2 \in R^n, \quad f(t, 0) \equiv 0.$$

Предположим, что для решения уравнения (10) справедливо неравевство

$$\| y(t\colon t_0, y_0) \| \le D_0 \| y(t_0) \| e^{(\Lambda+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \ge t_0, \quad \varepsilon > 0, \quad y(t_0) = y_0,$$

Λ — старший характеристический показатель уравнения (1). Пусть

$$\int_{t_0}^{+\infty} \| Y^{-1}(s) \| \psi(s) e^{(\Lambda+\varepsilon)s} ds < +\infty,$$

$$D_0 \exp\left\{ \int_{t_0}^{+\infty} \| Y^{-1}(s) \| \psi(s) e^{(\Lambda+\varepsilon)s} ds \right\} \le D.$$

Тогда

$$\| x(t) \| \le D_0 e^{(\Lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \| x(t_0) \| + \int_{t_0}^{t} \| Y(t) Y^{-1}(s) \| \psi(s) \| x(s) \| ds.$$

Отсюда справедлива оценка

$$\| x(t) \| \le D \| x(t_0) \| e^{(\Lambda+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \ge t_0.$$

Теорема 2. *Если*

$$\int_{t}^{+\infty} \| Y^{-1}(s) \| \psi(s) e^{(\Lambda+\varepsilon)s} ds = o(1)$$

при $t \to +\infty$, $\varepsilon > 0$, *то уравнение* (9) *преобразованием Ляпунова*

$$y = \varphi(t, x) = x + \int_{t}^{+\infty} Y(t) Y^{-1}(s) f(s, x(s)) ds \tag{11}$$

приводимо к уравнению (10). *Кроме того,*

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\| \le l_1 \| x(t) \|, \quad \left\| \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial t} \right\| \le l_2 \| y(t) \|, \quad \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right\| \le l_3, \quad \left\| \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial y} \right\| \le l_4$$

при $t \ge T$, $l_i \ge 0$, $i = \overline{1, 4}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$L_0 x(t) = -\int_t^{+\infty} Y(t) Y^{-1}(s) f(s, x(s))\, ds, \quad x(s) = x(s\colon t, x(t)), \quad s \geq t, \tag{12}$$

где $x \in B_{\Lambda+\varepsilon}$.

Так как

$$\| L_0 x(t) \| \leq D \| x(t) \| e^{-(\Lambda+\varepsilon)t} \int_t^{+\infty} \| Y(t) Y^{-1}(s) \| \psi(s) e^{(\Lambda+\varepsilon)s} ds, \quad t \geq t_0,$$

то оператор (12) определен корректно и $L_0\colon R^n \to R^n$. Кроме того,

$$\| L_0 x_1(t) - L_0 x_2(t) \| \leq D e^{-(\Lambda+\varepsilon)t} \int_t^{+\infty} \| Y(t) Y^{-1}(s) \| \psi(s) e^{(\Lambda+\varepsilon)s} ds \| x_1(t) - x_2(t) \|.$$

Поэтому при достаточно большом t_0 L_0 — оператор сжатия. Тогда из [1, с. 508] вытекает, что оператор $F = E - L_0$ имеет обратный F^{-1} и

$$\| F x_1(t) - F x_2(t) \| \leq D_1 \| x_1(t) - x_2(t) \|, \quad t \geq t_0, \quad D_1 \geq 0,$$

$$\| F^{-1} y_1(t) - F^{-1} y_2(t) \| \leq D_2 \| y_1(t) - y_2(t) \|, \quad t \geq t_0, \quad D_2 \geq 0.$$

Отсюда следует: для преобразования (11) справедливо неравенство $\| y \| \leq D_1 \| x \|$; для обратного преобразования — $\| x \| \leq D_2 \| y \|$.

Запишем преобразование (11) в виде $y = \varphi(t, x)$. Тогда

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| \leq \left[K_1 D e^{-(\Lambda+\varepsilon)t} \int_t^{+\infty} \| Y(t) Y^{-1}(s) \| \psi(s) e^{(\Lambda+\varepsilon)s} ds + \psi(t) \right] \| x(t) \|, \quad t \geq t_0.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\| \leq l_1 \| x(t) \|, \quad t \geq t_0, \quad l_1 \geq 0.$$

Пусть

$$\varphi_0(t, l, x) = x + \int_t^{l} Y(t) Y^{-1}(s) f(s, x(s))\, ds.$$

Тогда

$$\| \varphi_0(t, l, x_1) - \varphi_0(t, l, x_2) \| \leq D_1(l) \| x_1 - x_2 \|$$

и $D_1(l) \to D_1$ при $l \to +\infty$, $D_1 > 0$. Кроме того,

$$\| \varphi_0(t, l, x_1) - \varphi_0(t, l_1, x_2) \| = \frac{\partial \varphi_0(t, l, \bar{x})}{\partial x}(x_1 - x_2), \quad \bar{x} = x_1 + \theta(x_1 - x_2), \ 0 \leq \theta \leq 1,$$

$$\| \varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2) \| \leq D_1 \| x_1 - x_2 \|, \ \| \varphi^{-1}(t, y_1) - \varphi^{-1}(t, y_2) \| \leq D_2 \| y_1 - y_2 \|$$

при всех $t \geq T$ и при всех $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^n$. Тогда

$$\left\| \frac{\partial \varphi_0(t, l, \bar{x})}{\partial x} \right\| \leq D_1(l),$$

но при $l \to +\infty$ $\varphi_0(t, l, \bar{x}) \to \varphi(t, \bar{\bar{x}})$, $\bar{\bar{x}} = x_1 + \theta_1(x_1 - x_2)$, $0 \leq \theta_1 \leq 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi_0(t,\ l,\ \bar{x})}{\partial x} \to \frac{\partial \varphi(t,\ \bar{x})}{\partial x}$$

при $l \to +\infty$ и, так как x_1 и x_2 произвольны, то

$$\left\| \frac{\partial \varphi(t,\ x)}{\partial x} \right\| \le D_1$$

при всех $t \ge T$ и $x \in R^n$. Аналогично

$$\left\| \frac{\partial \varphi^{-1}(t,\ y)}{\partial y} \right\| \le D_2$$

при всех $t \ge T$ и $x \in R^n$.

Если учесть тождество $\varphi(t, \varphi^{-1}(t, y)) \equiv y$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} = E,$$

E — $(n \times n)$-единичная матрица. Тогда

$$\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^{-1}.$$

Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial t} = 0,$$

то

$$\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\left\| \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial t} \right\| \le l_2 \| y(t) \|, \ t \ge T, \ l_2 \ge 0.$$

Теорема 2 доказана.

3. Полученные результаты применим к уравнению Шредингера. Пусть уравнение (10) линейно однородное. Тогда рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{13}$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{14}$$

где A — постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, $A(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$, $Y(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (14), нормированная в точке t_0, $X(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (13), нормированная в точке t_0, $\| A(t) \| \le K_0$, $0 \le t < +\infty$.

Теорема 3. *Если*

$$e^{-(\Lambda + \varepsilon)t} \int_t^{+\infty} \| Y(t) Y^{-1}(s) A(s) - A \| e^{(\Lambda + \varepsilon)s} ds = o(1)$$

при $t \to +\infty$, *то уравнение* (13) *преобразованием Ляпунова*

$$y = x + \int_t^{+\infty} Y(t) Y^{-1}(s) (A(s) - A) x(s) ds$$

приводимо к уравнению (14).

Доказательство теоремы 3 вытекает из теоремы 2.

Замечание. Если

$$\int_0^{+\infty} e^{(r_0+\varepsilon)s}\,\|A(s)-A\|\,ds < +\infty,$$

где $r_0 = \Lambda - \lambda$, λ — младший показатель уравнения (14), то условия теоремы 3 выполняются. Заметим, что если элементарные делители матрицы A, соответствующие характеристическим показателям Λ и λ, простые, то $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{h^2}{2m}\Psi'' + (V-E)\Psi = 0, \tag{15}$$

где $h > 0$, $V(+\infty) = C_0$, $V \in C([0,+\infty), R^1)$. Пусть уравнение (14) здесь имеет вид

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{2m}{h^2}(E-C_0)\,y_1 \tag{16}$$

и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2m}{h^2}(E-l_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда если $C_0 = E$, то $\Lambda = 0$ и соответствующие элементарные делители простые. Если же $C_0 > E$, то $\Lambda = \sqrt{2m(C_0-E)h^{-2}}$ и соответствующие элементарные делители простые. В первом случае приводимость уравнения (15) к уравнению (16) возможна при условии, что

$$\int_0^{+\infty} e^{\varepsilon s}\,|V(s)-C_0|\,ds < +\infty,$$

во втором —

$$\int_0^{+\infty} e^{2\Lambda s}\,|V(s)-C_0|\,ds < +\infty.$$

Пусть $C_0 < E$. Тогда $\Lambda = 0$ и элементарные делители простые. Значит, приводимость возможна при

$$\int_0^{+\infty} |V(s)-C_0|\,ds < +\infty.$$

Для рассмотренных случаев легко проверяется, что уравнения (15) и (16) удовлетворяют условиям теоремы 3.

1. *Теория* показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноградов, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. *Богданов Ю. С., Мазаник С. А.* Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1988. – С. 9 – 13.
3. *Алексеев В. М.* Об одной оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. – 1961. – **2**. – С. 28 – 36.
4. *Воскресенский Е. В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – 224 с.

Получено 20. 03. 91