УДК 517. 946. 9

Г. Н. Комаров (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
М. М. Ошхунов (Кабардино-Балк. ун-т, Нальчик)

О РАЗРЕШИМОСТИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

The questions of existence and uniqueness generalized solutions of boundary value problems arising in physically nonlinear nonconnected thermoelasticity are investigated. Convergence of iterative processes in the space W_2^1 is proved.

Вивчаються питання існування та єдиності узагальнених розв'язків нелінійних векторних крайових задач, які виникають у проблемах фізично нелінійної теорії термопружності. Доведена збіжність ітераційних процесів у просторі W_2^1.

Как известно [1, 2], для материалов, подчиняющихся закону малых упругопластичных деформаций, коэффициент объемного расширения K и модуль сдвига G пропорциональны множителям $1-\varphi(\theta, e_u)$ и $1-\omega(\theta, e_u)$, где φ и ω — заданные функции двух инвариантов тензора деформаций $\theta = 3\varepsilon_0$ и $e_u = \sqrt{2}\,\psi_0$. Определение компонент вектора смещения $\bar{u}$ в теле из такого материала с учетом данной зависимости приводит к решению следующей нелинейной краевой задачи для векторного уравнения типа Ляме [3]:

$$G\Delta \bar{u} + \left(K + \frac{1}{3}G\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} = 3K\alpha \operatorname{grad} T - \bar{F} + \bar{\Phi}\bar{u}, \quad x, y, z \in \Omega, \tag{1}$$

$$\bar{u} = 0, \; x, y, z \in S_1,$$

$$\bar{n}(3KD_0 + 2GD' - 3K\alpha TE) = \bar{\sigma}_0 + \bar{n}(3K\varphi D_0 + 2G\omega D' - 3K\alpha T\varphi E), \tag{2}$$

$$x, y, z \in S_2.$$

Здесь Δ — векторный оператор Лапласа; div и grad — операторы дивергенции и градиента; α — коэффициент линейного теплового расширения; T — температура; $\bar{F}$ — заданный вектор плотности объемной силы;

$$\bar{\Phi}\bar{u} = \operatorname{div}(3K\varphi D_0 + 2G\omega D') - 3K\alpha \operatorname{grad}(\varphi T), \tag{3}$$

D_0 и D' — шаровая и девиаторная составляющие тензора деформаций $D = D_0 + D'$; $\bar{\sigma}_0$ — вектор плотности заданной на $S_2 \in S = S_1 \cup S_2$ поверхностной нагрузки; $\bar{n}$ — орт нормали к поверхности S, ограничивающей тело Ω; E — единичный тензор; величины α, K, G зависят от T.

Отметим, что все нелинейности содержатся только в правых частях уравнений (1), (2) и выражаются через производные компонент вектора $\bar{u}$ согласно (3) с учетом соответствующих зависимостей для функций φ и ω от θ и e_u, а также выражений для компонент тензора деформаций D через частные производные компонент вектора смещения $\bar{u}$. Такое представление системы разрешающих уравнений (1), (2) позволяет для нахождения ее приближенных решений воспользоваться итерационным процессом, полагая, что все нелинейные члены уравнений вычисляются по предыдущей итерации. В качестве начальной принимается нулевая итерация, когда $\varphi^{(0)} = \omega^{(0)} = 0$. При этом первая итерация определяется как решение соответствующей линейной задачи (1), (2).

Для доказательства сходимости процесса итераций введем понятие обобщенного решения и соответствующей нормы, в рамках которой будем ставить вопрос о существовании решения. Под обобщенным решением будем понимать решение $\vec{u}$, удовлетворяющее интегральному тождеству, получаемому после умножения уравнения (1) на вектор-функцию $\vec{v}$ из соответствующего пространства, однократного интегрирования и учета краевых условий (2). С использованием тензорных обозначений это интегральное тождество записывается в следующем виде:

$$\int_{\Omega} \left(K\theta_u\theta_v + 2G\text{э}_{ij}\tilde{\text{э}}_{ij}\right) d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left(F_i v_i + 3K\alpha T\theta_v + K\varphi\theta_*\theta_v + 2G\omega\text{э}_{ij}\tilde{\text{э}}_{ij}\right) d\Omega + \int_{S_2} \sigma_{0i} v_i \, ds, \tag{4}$$

где ε_{ij}, э_{ij} и $(1/3)\theta$ — соответственно компоненты тензора деформаций D, его девиаторной D' и шаровой D_0 частей, выражающиеся через производные компонент вектора смещения по формулам

$$\text{э}_{ij} = e_{ij} - (1/3)\theta_u\delta_{ij}, \; e_{ij} = (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$\tilde{\text{э}}_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\theta_v\delta_{ij}, \; \varepsilon_{ij} = (1/2)(v_{i,j} + v_{j,i}), \tag{5}$$

$$\theta_* = \theta_u - 3\alpha T, \quad \theta_u = u_{i,i}, \quad \theta_v = v_{i,i},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad \text{э}_{ij}\text{э}_{ij} = (3/2)\, e_u^2.$$

В (4), (5) повторяющиеся индексы означают суммирование от 1 до 3, а запятая на уровне индексов — дифференцирование по соответствующей координате.

Рассмотрим линейное множество N вектор-функций, дважды непрерывно дифференцируемых в области Ω и равных нулю на части поверхности S_1. Введем скалярное произведение вектор-функций $\vec{u}$, $\vec{v}$ и норму $\vec{u}$ согласно формулам

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(K\theta_u\theta_v + 2G\text{э}_{ij}\tilde{\text{э}}_{ij}\right) d\Omega, \tag{6}$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(K\theta_u^2 + 2G\text{э}_{ij}\text{э}_{ij}\right) d\Omega. \tag{7}$$

После дополнения введенного множества предельными элементами по норме (7) получаем полное гильбертово пространство M обобщенно дифференцируемых функций с суммируемыми квадратами первых производных.

Назовем уравнение (4) обобщенным уравнением, а функцию $\vec{u}$, удовлетворяющую этому уравнению для любой функции $\vec{v} \in M$, обобщенным (слабым) решением исходной задачи (1), (2). Легко заметить, что если существует классическое решение задачи, то выполняется и обобщенное уравнение. Обратное, очевидно, не верно.

Приближенное обобщенное решение также будем строить методом итераций

$$\int_{\Omega} \left(K\theta_u^{(n+1)}\theta_v^{(n+1)} + 2G\text{э}_{ij}^{(n+1)}\tilde{\text{э}}_{ij}^{(n+1)}\right) d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \left(F_i v_i + 3K\alpha T\theta_v^{(n)} + K\varphi^{(n)}\theta_*^{(n)}\theta_v^{(n)} + 2G\omega^{(n)}\text{э}_{ij}^{(n)}\tilde{\text{э}}_{ij}^{(n)}\right) d\Omega + \int_{S_2} \sigma_{0i} v_i \, ds. \tag{8}$$

Докажем, что в пространстве обобщенно дифференцируемых функций с суммируемыми квадратами первых производных существует решение обобщенного уравнения (4).

Теорема. *Пусть справедливы условия*

$$F_i \in L_p(\Omega), \quad p > 6/5; \quad \sigma_{0i} \in L_m(S_2), \quad m > 4/3; \quad \alpha T \in L_n(\Omega), \quad n > 2, \tag{9}$$

а для функций φ, ω *выполняются неравенства*

$$\left| \frac{\partial[\varphi(\theta - 3\alpha T)]}{\partial\theta} \right| \le \alpha, \quad \sqrt{\frac{K}{3G}} \left| \frac{\partial[\varphi(\theta - 3\alpha T)]}{\partial e_u} \right| \le \delta, \quad \sqrt{\frac{3G}{K}} \left| \frac{\partial[\omega e_u]}{\partial\theta} \right| \le \beta;$$

$$\left| \frac{\partial[\omega e_u]}{\partial e_u} \right| \le \gamma, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \le \lambda^2 < 1, \quad \omega \ge 0, \ \varphi \ge 0, \quad \lambda > 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial e_u} \ge 0, \quad K(T) > 0, \quad G(T) > 0.$$

Тогда последовательность $\bar{u}^{(n)}$, *полученная методом итераций* (8), *будет сходиться к обобщенному решению задачи при любом начальном векторе* $\bar{u}^{(0)} \in M$.

Доказательство. Существование интегралов, входящих в (8), следует из условий (9) и теорем вложений С. Л. Соболева [4]. Согласно неравенству Гельдера [4] имеем

$$\int_\Omega |F_i v_i| \, d\Omega \le \left[\int_\Omega \left(|F_1|^p + |F_2|^p + |F_3|^p \right) d\Omega \right]^{1/p} \times$$

$$\times \left[\int_\Omega \left(|v_1|^q + |v_2|^q + |v_3|^q \right) d\Omega \right]^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1; \tag{11}$$

$$\int_{S_2} |\sigma_{0i} v_i| \, ds \le \left[\int_{S_2} \left(|\sigma_{01}|^m + |\sigma_{02}|^m + |\sigma_{03}|^m \right) ds \right]^{1/m} \times$$

$$\times \left[\int_{S_2} \left(|v_1|^n + |v_2|^n + |v_3|^n \right) ds \right]^{1/n}, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1, \quad m > 1. \tag{12}$$

Так как $v_i \in W_2^1$, согласно теореме о вложении W_p^l в L_q [4] получаем

$$v_i \in L_q, \ q < 6, \quad \text{и} \quad v_i \in L_q, \ q < 4, \tag{13}$$

для случая пространства трех и двух измерений соответственно. Согласно условиям (11), (12) находим ограничения на F_i и σ_{0i}:

$$F_i \in L_q, \quad q > \frac{p}{p-1} = \frac{6}{5}; \qquad \sigma_{0i} \in L_n, \quad n > \frac{m}{m-1} = \frac{4}{3}. \tag{14}$$

Аналогичным образом можно доказать существование интегралов, содержащих слагаемые вида

$$\int_\Omega \alpha T \theta_v^{(n)} \, d\Omega.$$

Таким образом, указанные интегралы в правой части (8) существуют, если выполнены условия (9). Остальные интегралы в (8) существуют в силу ограниченности φ, ω и свойств пространства M.

Из формул (8) в случае $\vec{v}^{(n+1)} = \vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)}$ имеем

$$\|\vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)}\|_{\Omega}^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega} K\big(\theta_*^{(n)}\varphi^{(n)} - \theta_*^{(n-1)}\varphi^{(n-1)}\big)\big(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\big)\, d\Omega \; +$$

$$+ \int_{\Omega} G\big(\omega^{(n)}э_{ij}^{(n)} - \omega^{(n-1)}э_{ij}^{(n-1)}\big)\big(э_{ij}^{(n+1)} - э_{ij}^{(n)}\big)\, d\Omega. \tag{15}$$

Возможность выбора в качестве $\vec{v}^{(n+1)} = \vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)}$ обеспечивается тем, что если $\vec{u}^{(n)} \in M$, то, как следует из теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в виде скалярного произведения, $\vec{u}^{(n+1)}$ принадлежит пространству M.

Оценим правую часть (15), предварительно разбив подынтегральные слагаемые на суммы

$$K\big(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\big)\big(\theta_*^{(n)}\varphi^{(n)} - \theta_*^{(n)}\varphi^{(n-1)}\big) =$$

$$= K\big(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\big)\Big[\big(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\big)\varphi^{(n)} + \big(\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)}\big)\theta_*^{(n)}\Big],$$

$$G\big(э_{ij}^{(n+1)} - э_{ij}^{(n)}\big)\big(э_{ij}^{(n)}\omega^{(n)} - э_{ij}^{(n)}\omega^{(n-1)}\big) =$$

$$= G\big(э_{ij}^{(n+1)} - э_{ij}^{(n)}\big)\Big[\big(э_{ij}^{(n+1)} - э_{ij}^{(n)}\big)\omega^{(n)} + \big(\omega^{(n)} - \omega^{(n-1)}\big)э_{ij}^{(n)}\Big].$$

В приведенных формулах использовано очевидное равенство

$$\theta_*^{(n+1)} - \theta_*^{(n)} = \theta^{-(n+1)} - \theta^{(n)},$$

следующее из формулы (5).

Используя теорему о среднем и неравенство треугольника, получаем

$$|\,\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}|\, |\varphi^{(n)}\theta_*^{(n)} - \varphi^{(n-1)}\theta_*^{(n+1)}| \le$$

$$\le |\,\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}| \left[|\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}| \left| \frac{\partial[\varphi\theta_*]}{\partial\theta}\Big|_{\tilde\theta, \tilde e_u} \right| + |e_u^{(n)} - e_u^{(n-1)}| \left| \frac{\partial[\varphi\theta_*]}{\partial e_u}\Big|_{\tilde\theta, \tilde e_u} \right| \right], \tag{16}$$

$$\big(э_{ij}^{(n+1)} - э_{ij}^{(n)}\big)\big(\omega^{(n)}э_{ij}^{(n)} - \omega^{(n-1)}э_{ij}^{(n-1)}\big) \le \frac{3}{2}\, e_u\big(\vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)}\big) \times$$

$$\times \left[\left| \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\Big|_{\tilde\theta, \tilde e_u} \right| |\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}|\, e_u^{(n)} + e_u\big(\vec{u}^{(n)} - \vec{u}^{(n-1)}\big) \left| \frac{\partial[\omega e_u]}{\partial e_u}\Big|_{\tilde\theta, \tilde e_u} \right| \right].$$

Здесь $\tilde\theta, \tilde e_u$ — некоторые средние значения из интервалов $(\theta^{(n-1)}, \theta^{(n)})$ и $\big(e_u^{(n-1)}, e_u^{(n)}\big)$;

$$э_{ij}^{(n)} = (1/2)\big(u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)}\big) - (1/3)\theta^{(n)}\delta_{ij},$$

$$e_u^{(n)} = \big[(2/3)\, э_{i,j}^{(n)}, э_{i,j}^{(n)}\big]^{1/2} \equiv e_u[\vec{u}^{(n)}].$$

Используя интегральное неравенство Буняковского и неравенство треугольника, имеем

$$\|\vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)}\|_{\Omega}^2 \le \mu_n \|\vec{u}^{(n)} - \vec{u}^{(n-1)}\|_{\Omega}^2,$$

$$\mu_n = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2},$$

$$A_1 = \left| \frac{\partial[\varphi\theta_*]}{\partial\theta} \right|, \qquad A_4 = \left| \frac{\partial[\omega e_u]}{\partial e_u} \right|,$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{K}{3G}} \left| \frac{\partial[\varphi\theta_*]}{\partial e_u} \right|, \qquad A_3 = \sqrt{\frac{3G}{K}} \left| \frac{\partial[\omega e_u]}{\partial\theta} \right|.$$

Выполнение условий (10) обеспечивает справедливость неравенства $\mu_n < 1$, что в свою очередь гарантирует сходимость процесса последовательных приближений. Теорема доказана.

Можно показать, что из условий (10) следуют ограничения, обеспечивающие также единственность решения. Таким образом, при выполнении условий (9), (10) имеет место существование и единственность решения поставленной задачи.

Влияние температурного поля на существование и единственность решения нелинейной задачи проявляется в том, что условия (10) должны выполняться для любого значения T. Кроме того, $\alpha T \in L_n(\Omega)$, $n > 2$. В случае отсутствия влияния температуры указанные ограничения не имели бы места.

Частные случаи физически нелинейных законов без учета влияния температуры изучались в работах [5, 6]. В частности, в [5] доказана сходимость итераций для теории малых упруго-пластических деформаций ($\omega = \omega(e_u)$, $\varphi = 0$), а в [6] те же вопросы рассматриваются для двухинвариантной теории.

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 337 с.
2. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 778 с.
3. *Комаров Г. Н.* Физически нелинейная задача термоупругости осесимметрично деформированного многослойного цилиндра. – Киев, 1994. – 42 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 94.30).
4. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 211 с.
5. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 4. – С. 247–254.
6. *Быков Д. Л.* О некоторых методах решения задач теории пластичности // Упругость и неупругость. – М.: Моск. ун-т, 1975. – 4. – С. 96–107 с.

Получено 22.02.96