УДК 531.36

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НЕСТІЙКІСТЬ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ З ГІРОСКОПІЧНИМИ СИЛАМИ

Theorems on equilibrium instability of conservative systems with gyroscopic forces are proved. The theorems obtained are nonlinear analogs of the Kelvin theorem. The equilibrium instability of the Chaplygin nonholonomic systems is considered.

Доводяться теореми про нестійкість рівноваги консервативних систем з гіроскопічними силами. Отримані теореми є нелінійним аналогом теореми Кельвіна. Розглядається нестійкість рівноваги неголономних систем Чаплигіна.

1. Розглянемо голономну систему з n ступенями вільності

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{1}$$

лагранжіан якої має вигляд

$$L(q, \dot{q}) = L_2(q, \dot{q}) + L_1(q, \dot{q}) + L_0(q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q} + f(q)^T \dot{q} + L_0(q). \tag{2}$$

Вважатимемо, що $L(q, \dot{q}) \in C^2(D_q \times R^n)$, квадратична форма $L_2(0, \dot{q})$ додатно визначена, точка $q = \dot{q} = 0$ відповідає положенню рівноваги системи (1) і $f(0) = 0$, $L_0(0) = 0$.

Як відомо [1], наявність в лагранжіані L доданка $L_1(q, \dot{q}) = f(q)^T \dot{q}$ (якщо тільки $L_1 \neq d\psi(q)/dt$, де ψ — довільна функція з класу C^3) свідчить про те, що система (1), (2) гіроскопічно зв'язана. Отже, відповідні гіроскопічні сили досліджуваної системи можуть породжувати стабілізуючий ефект [2, 3]. Питання щодо можливості забезпечення стійкості положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ системи за рахунок стабілізуючої дії сил гіроскопічної природи і донині залишається в багатьох випадках відкритим. Тому його розгляд становить певний інтерес як з точки зору теорії стійкості гіроскопічних систем, так і в плані її застосувань. В даній роботі продовжуються дослідження, викладені в [4].

Перепишемо рівняння (1) у більш зручному вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_2}{\partial q} = \frac{\partial L_0}{\partial q} - G(q)\dot{q}, \tag{3}$$

$$G = (g_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_i}{\partial g_i}\right), \qquad i, j = \overline{1, n}.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) *функція* $L_0(q)$ *має вигляд*

$$L_0(q) = L_0^{(m)}(q) + R(q), \qquad R(q) = o(\|q\|^m),$$

де $L_0^{(m)}(q)$ — *однорідна функція степеня* $m > 2$;

2) *функція* $L_0^{(m)}(q)$ *в точці* $q = 0$ *не має екстремуму;*

3) $\det G(0) \neq 0$;

4) *існує такий* ε-*окіл* $s_\varepsilon = \{q \in R^n, \|q\| < \varepsilon\}$ *точки* $q = 0$, *що система*

$$\frac{\partial L_0^{(m)}}{\partial q} - G(0)\dot{q} = 0$$

не містить інваріантної множини в $s_\varepsilon \setminus \{0\}$;

5) $\lim\limits_{\|q\|\to 0} \left\| \dfrac{\partial R}{\partial q} \right\| \| q \|^{-m+1} = 0.$

Тоді положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ *системи* (1), (2) *нестійке.*

Доведення. Оскільки $\det G(0) \neq 0$, то вибір узагальнених координат з урахуванням теореми Дарбу [5, 6] можна здійснити таким чином, щоб функція $L_1(q, \dot{q})$ була білінійною формою, а матриця $G = G(0) = G_0$. У відповідності з даним вибором рівняння (3) зобразимо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} + G_0 q \right) = \frac{\partial (L_2 + L_0)}{\partial q}. \tag{4}$$

Разом з тим, покладаючи в (3)

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} = A\dot{q} = p,$$

одержуємо систему

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - G_0 \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{5}$$

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T A^{-1} p - L_0(q) = h = \text{const}. \tag{6}$$

Системи (4), (5) — еквівалентні.

Зробимо заміну змінних у рівняннях (4):

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} + G_0 q = p + G_0 q = G_0 z. \tag{7}$$

В результаті замість (4) одержимо

$$G_0 \dot{z} = \left.\frac{\partial L_0}{\partial q}\right|_{q \to z - G_0^{-1} p} + O\left(\| p \|^2\right). \tag{8}$$

Згідно з умовою 2 теореми непорожньою є множина

$$\Omega = \{(q, p) \in s_\varepsilon^* = \{(q, p) \in D_q \times R^n, \ \| q \oplus p \| < \varepsilon\} : H(q, p) = h < 0\} \neq \varnothing.$$

На підставі (6) маємо

$$\| p \|^2 < \lambda \| q \|^m \quad \forall\, (q, p) \in \Omega, \quad 0 < \lambda = \text{const}. \tag{9}$$

У відповідності з (7) – (9) отримуємо

$$G_0 \dot{z} = \frac{\partial L_0^{(m)}(z)}{\partial z} + o\left(\| z \|^{m-1}\right) \quad \forall\, (q, p) \in \Omega. \tag{10}$$

Розглянемо вкорочену систему

$$\dot{z} = G_0^{-1} \frac{\partial L_0^{(m)}(z)}{\partial z}. \tag{11}$$

На підставі умови 4 теореми згідно з [7, с. 113] існує функція $V(z) \in C^1$, що задовольняє нерівності

$$| V(z) | \le c_1 \| z \|^{\mu}, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial z} \right\| \le c_2 \| z \|^{\mu - 1}, \quad \left.\frac{dV}{dz}\right|_{z \in (11)} \le -c_3 \| z \|^{\mu + m - 2}, \tag{12}$$

де c_i, $i = 1, 2, 3$, μ — додатні сталі.

Враховуючи (12), розглянемо похідну по векторному полю, що визначається рівняннями (5), (8), від функції $V_1 = -H(q, p) V(z)$. В результаті отримаємо

$$\frac{dV_1}{dt} = -H(q,p)\frac{\partial V}{\partial z}G_0^{-1}\left[\frac{\partial L_0}{\partial q}\bigg|_{q\to z-G_0^{-1}p} + O\left(\|p\|^2\right)\right]. \tag{13}$$

Обмежимось розглядом руху системи (5), (8) на множині $\Omega\times s_\eta$, $s_\eta=\{z\in R^n, \ \|z\|<\eta\}$, де η — достатньо мале число. Тоді згідно з (10), (12), (13) маємо

$$\frac{dV_1}{dt} \le -H(q,p)\left[-c_3\|z\|^{\mu+m-2}+o\left(\|z\|^{\mu+m-2}\right)\right] \qquad \forall\,(q,p,z)\in\Omega.\times s_\eta. \tag{14}$$

На підставі (7), (9) величина $\|z\|$ не може перетворитися в нуль для будь-яких $(q,p)\in\Omega$, якщо число ε достатньо мале. Отже, похідна dV_1/dt у відповідності з (14) є від'ємною для будь-яких $(q,p,z)\in\Omega\times s_\eta$.

Припустимо, що положення рівноваги системи (1), (2) стійке. Тоді непорожньою є множина додатних граничних точок траєкторій ω^+, причому $\omega^+\cap\Omega\neq\emptyset$. З іншого боку, враховуючи від'ємність dV_1/dt для всіх $(q,p,z)\in\Omega\times s_\eta$, згідно з принципом інваріантності Ла-Салля [8, 9] маємо $\omega^+\cap\Omega=\emptyset$. Одержана суперечність дозволяє зробити висновок про справедливість теореми.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $n=2$, *виконуються умови* 1–3, 5 *теореми* 1 *і, крім того:*

4*) $\partial L_0^{(m)}(q)/\partial q\neq 0 \ \ \forall\, q\in R^2\setminus\{0\}$.

Тоді положення рівноваги $q=\dot q=0$ *системи* (1), (2) *нестійке.*

***Наслідок* 2.** *Нехай виконуються умови* 1–3, 5 *теореми* 1 *і, крім того:*

4a*) $\partial L_0^{(m)}(q)/\partial q\neq 0 \ \ \forall\, q\in R^n\setminus\{0\}$;

4b*) $\partial L_0^{(m)}(q)/\partial q = G(0)C\partial W/\partial q$, *де* C — *симетрична знаковизначена матриця.*

Тоді положення рівноваги $q=\dot q=0$ *системи* (1), (2) *нестійке.*

Доведення. Враховуючи, що $\det G(0)\neq 0$, згідно з теоремою Дарбу вибір узагальнених координат здійснюємо таким чином, що $G=G(0)=G_0$.

У відповідності зі схемою доведення теореми 1 вкорочену систему (11) на підставі умови 4b* наслідку зображуємо у вигляді

$$\dot z = G_0^{-1}\frac{\partial L_0^{(m)}(z)}{\partial z} = C\frac{\partial W}{\partial z}. \tag{15}$$

Розглядаючи похідну по векторному полю, що визначається рівняннями (5), (8) від функції $V_2=-H(q,p)W(z)$, з урахуванням (10), (15) отримуємо

$$\frac{dV_2}{dt} = -H(q,p)\left[\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^T C\frac{\partial W}{\partial z}+o\left(\|z\|^{2m-2}\right)\right] \qquad \forall\,(q,p,z)\in\Omega\times s_\eta. \tag{16}$$

Отже, застосовуючи міркування, що використовувались при доведенні теореми 1, робимо висновок про справедливість наслідку 2.

2. Характерні особливості гіроскопічних систем, що відображені в умовах теореми 1, дозволяють звести дослідження стійкості вихідної системи (1), (2) до допоміжної системи (11), розмірність якої вдвічі менша. Проте досить жорстка умова 4 теореми 1 робить цю перевагу проблематичною. Тому хотілося б виділити такий клас гіроскопічних систем, нестійкість рівноваги яких визначалася б лише певними обмеженнями на лагранжіан $L(q,\dot q)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) *функція* $L_0(q)$ *має вигляд*

$$L_0(q) = L_0^{(m)}(q) + R(q), \quad R(q) = o\left(\|q\|^m\right),$$

де $L_0^{(m)}(q)$ *— однорідна функція степеня* $m > 2$;

2) $L_0^{(m)}(-\lambda q) = -\lambda^m L_0^{(m)}(q)$, $L_0^{(m)}(q) \equiv 0$, $\mathrm{const} = \lambda > 0$;

3) $\det G(0) \neq 0$;

4) $\lim\limits_{\|q\| \to 0} \left\| \dfrac{\partial R}{\partial q} \right\| \left(\|q\|^{-m+1-\alpha} \right) = 0, \quad \alpha = \mathrm{const}, \quad \alpha \in \left]0, 1\right[.$

Тоді положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ *системи* (1), (2) *нестійке.*

Доведення. Застосовуючи неособливе лінійне перетворення, рівняння (5) приводимо до вигляду, в якому

$$A(q) = E + A^*(q), \quad A^*(0) = 0,$$

де E — одинична матриця, а постійна матриця G_0, за якою зберігаємо попереднє позначення, як і раніше, залишається кососиметричною.

Поряд з визначеною вище множиною Ω, яка є непорожньою згідно з умовою 2 даної теореми, розглянемо множину

$$\Lambda^* = \left\{ (q, p) \in s_\varepsilon^* : H(q, p) = h \le 0, \ \kappa > 0 \right\},$$

де

$$\kappa = qp - \sigma \|q\|^{m/2+1} e^{-\|q\|^\alpha}, \quad 0 < \sigma = \mathrm{const}.$$

При належному виборі сталої σ множина Λ^* непорожня. Щоб довести це, достатньо скористатися схемою, запропонованою в [10, 11].

Розглянемо функцію

$$V = qp - \sigma \|q\|^{m/2+1} e^{-\|q\|^\alpha}. \tag{17}$$

Обчислимо похідну по t від V вздовж векторного поля, що визначається рівняннями (5). В результаті одержимо

$$\dot{V} = \|p\|^2 + o\left(\|p\|^2\right) + m L_0^{(m)} +$$

$$+ \sigma q p e^{-\|q\|^\alpha} \left[-\left(\frac{m}{2} + 1\right) \|q\|^{m/2-1} + \alpha \|q\|^{m/2-1+\alpha} \right] - q^T G_0 \frac{\partial H}{\partial p} + o\left(\|q\|^{m+\alpha}\right). \tag{18}$$

Розв'язуючи (6) відносно $L_0^{(m)}$, рівності (18) надаємо вигляду

$$\dot{V} = \left(\frac{m}{2} + 1\right) \|p\| \left[\|p\| - \sigma \cos(q \hat{,} p) \|q\|^{m/2} e^{-\|q\|^\alpha} \right] - mh + o\left(\|p\|^2\right) +$$

$$+ \alpha \sigma q p \|q\|^{m/2-1+\alpha} e^{-\|q\|^\alpha} - q^T G_0 \frac{\partial H}{\partial p} + o\left(\|q\|^{m+\alpha}\right). \tag{19}$$

Оскільки у відповідності з визначенням множини Λ^*

$$qp - \sigma \|q\|^{m/2+1} e^{-\|q\|^\alpha} > 0, \tag{20}$$

то, як наслідок з (20), маємо

$$\|p\| > \sigma \|q\|^{m/2} e^{-\|q\|^\alpha} \quad \forall (q, p) \in \Lambda^*. \tag{21}$$

На підставі (20), (21) з (19) отримуємо оцінку

$$\dot{V} > \alpha \sigma^2 \|q\|^{m+\alpha} + o\left(\|q\|^{m+\alpha}\right) - q^T G_0 \frac{\partial H}{\partial p} >$$

$$> \alpha^* \| q \|^{m+\alpha} - q^T G_0 \frac{\partial H}{\partial p} \quad \forall\, (q, p) \in \Lambda^*, \quad 0 < \alpha^* = \text{const}. \tag{22}$$

Додатність величини $\alpha^* \| q \|^{m+\alpha}$ в правій частині нерівності (22) сумнівів не викликає. Що ж стосується виразу $-q^T G_0 \partial H / \partial p$, то виникає потреба в його оцінці.

Перепишемо друге векторне рівняння системи (5) у вигляді

$$\frac{d}{dt}(p + G_0 q) = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{23}$$

Зробивши в системі (23) заміну

$$p + G_0 q = -G_0 z,$$

з урахуванням умови 2 теореми і визначення Λ^* отримуємо

$$-G_0 \dot{z} = \frac{\partial L_0^{(m)}}{\partial z} + o\left(\| z \|^{(m-1+\alpha)} \right) + O\left(\| z \|^{(m-1+\beta)} \right) \quad \forall\, (q, p) \in \Lambda^*, \tag{24}$$

де стала $\beta > 0$ залежить m. Вибравши сталу α у відповідності з умовою $\alpha < \beta$ (якщо $\beta < 1$), помножимо обидві частини рівності (24) на z^T. В результаті одержимо

$$-z^T G_0 \dot{z} = m L_0^{(m)}(z) + o\left(\| z \|^{(m+\alpha)} \right). \tag{25}$$

З рівності (25) випливає, що фазові траєкторії системи (24) мають ту властивість, що як тільки відповідна зображуюча точка траєкторії знаходиться в межах області

$$\omega = \left\{ z \in s_\varepsilon : L_0^{(m)}(z) - \mu_1 \| z \|^m > 0 \right\},$$

де μ_1 — достатньо мала додатна стала, то вираз $-z^T G_0 \dot{z}$ додатний.

З іншого боку, структура множини Λ^* з урахуванням нерівностей (20), (21) така, що звуження Λ^* на R_q^n якраз і містить значення q, які належать області типу ω. Зауважимо, зокрема, що система (24) — результат перетворення системи (5), причому $\| z \| = \| q \| + o(\| q \|) \quad \forall q \in \Lambda^*$. Отже, при належному виборі початкових умов область Λ^* перетинається множиною траєкторій Γ системи (5), які задовольняють нерівність

$$-q^T G_0 \dot{q} > 0 \quad \forall\, \gamma \subset \Gamma \cap \Lambda^*, \quad \Gamma \cap \Lambda^* \neq \varnothing. \tag{26}$$

На підставі (22), (26) маємо

$$\dot{V} > 0 \quad \forall\, \gamma \subset \Gamma \cap \Lambda^*. \tag{27}$$

Таким чином, на траєкторії $\gamma \subset \Gamma \cap \Lambda^*$ функція V не може перетворюватися в нуль, а отже, на γ виконується нерівність (20). Останню, аналогічно роботі [10], зобразимо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \| q \|^2 > \mu_2 \left(\| q \|^2 \right)^{(m+2)/4}, \quad 0 < \mu_2 = \text{const},$$

звідки робимо висновок про нестійкість рівноваги $q = \dot{q} = 0$ системи (1), (2).

Теореми 1, 2 деякою мірою розвивають результати про нестійкість, отримані в [4].

3. Запропонований підхід до дослідження стійкості голономних консервативних систем можна поширити на неголономні, які подамо у вигляді

$$B(q)\dot{q} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = B^T(q)\lambda, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)^T, \tag{29}$$

де $B(q) = (b_{ij}(q))$, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, n}$, $l < n$, — матриця розмірності $l \times n$, λ — множники в'язей, $L(q, \dot{q})$, $B(q) \in C^2(D_q \times R^n_{\dot{q}})$, лагранжіан L визначається виразом (2). Неінтегровані співвідношення (28), що обмежують узагальнені швидкості системи ($\operatorname{rank} B(q) = l$), є неголономними в'язями. Як і раніше, точка $q = \dot{q} = 0$ відповідає положенню рівноваги системи (28), (29) і $f(0) = 0$, $L_0(0) = 0$.

Оскільки $\operatorname{rank} B(q) = l$ то рівняння в'язей (28) завжди можна розв'язати відносно яких-небудь l компонент вектора узагальнених швидкостей. Без обмеження загальності міркувань вважатимемо, що такими є $\dot{q}_{n-l+1}, \dots, \dot{q}_n$. Припустимо, що лагранжіан L, а також коефіцієнти $b_{ij}(q)$ не залежать від координат $q_{n-l+1}, \dots, q_n$. Тоді, як відомо [12, 13], система (28), (29) є системою Чаплигіна.

Позначимо через $L_1^* = f_1^* \dot{q}_1 + \dots + f_{n-l}^* \dot{q}_{n-l}$ результат вилучення з L_1 величин $\dot{q}_{n-l+1}, \dots, \dot{q}_n$ з допомогою в'язей (28).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* 1, 2, 4 *теореми* 2 *і, крім того,*

$$\det G^*(0) \neq 0, \quad G^* = (g^*_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i^*}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j^*}{\partial q_i}\right), \quad i, j = \overline{1, n-l}.$$

Тоді положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ *системи* (28), (29) *нестійке.*

Доведення. Зобразимо матрицю $B(q)$ у вигляді

$$B(q) = B_0 + B_1,$$

де $B_0 = B(0)$, $B_1 = O(\|q\|)$, а в системі (28), (29) здійснимо заміну

$$B_0 q = z, \quad z = (z_1, \dots, z_l)^T. \tag{30}$$

Зображуючи рівняння в'язей (28) у вигляді

$$B_0 \dot{q} = -B_1 \dot{q} \tag{31}$$

і розв'язуючи (28) відносно узагальнених швидкостей $\dot{q}_{n-l+1}, \dots, \dot{q}_n$, замість (31) одержуємо

$$\dot{z} = B^* \dot{q}^*, \quad B^* = (b^*_{i\alpha}), \quad i = \overline{1, l}, \quad \alpha = \overline{1, n-l},$$

де $B^*(q^*)$ — матриця розмірності $l \times (n-l)$, $B^*(0) = 0$, $q^* = (q_1, \dots, q_{n-l})^T$.

Позначивши $(q^*, z) = w = (w_1, \dots, w_n)^T$, вихідному лагранжіану L надамо вигляду

$$L^* = \frac{1}{2}\dot{w}^T \tilde{A}(w)\dot{w} + g(w)^T \dot{w} + L_0(w),$$

а рівняння в'язей перепишемо у вигляді

$$\dot{w}_{n-l+i} = \sum_{\alpha=1}^{n-l} b^*_{i\alpha}(w)\dot{w}_\alpha, \quad b^*_{i\alpha}(0) = 0. \tag{32}$$

Після виключення множників в'язей з рівнянь (32), (29) з попередньою заміною в (29) L на L^* з точністю до позначень маємо [14]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta_2}{\partial \dot{w}_\alpha} = \frac{\partial(\Theta_2 + L_0)}{\partial w_\alpha} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{\kappa=1}^{n-l} \Theta_1 \beta_{i\alpha\kappa}\dot{w}_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{n-l} g_{\alpha\kappa}\dot{w}_\kappa, \tag{33}$$

де

$$\beta_{i\alpha\kappa} = \frac{\partial b_{i\alpha}^*}{\partial w_\kappa} - \frac{\partial b_{i\kappa}^*}{\partial w_\alpha}, \qquad \beta_{i\alpha\kappa} = -\beta_{i\kappa\alpha},$$

$$g_{\alpha\kappa} = \frac{\partial g_\kappa}{\partial w_\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial w_\kappa} + \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\partial g_{n-l+i}}{\partial w_\alpha} b_{i\kappa}^* - \frac{\partial g_{n-l+i}}{\partial w_\kappa} b_{i\alpha}^*\right), \qquad g_{\alpha\kappa} = -g_{\kappa\alpha}.$$

В рівняннях (33) Θ_2 і Θ_1 одержуються відповідно з $L_2^* = \dot{w}^T \tilde{A}\dot{w}/2$ і $\partial L_2^* / \partial \dot{w}_{n-l+i}$ вилученням $\dot{w}_{n-l+i}$ з допомогою співвідношень (32).

Зробивши заміну

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \dot{w}_\alpha} = p_\alpha,$$

замість (33) одержуємо

$$\dot{w}^* = \frac{\partial H^*}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H^*}{\partial w^*} + \tilde{G}\frac{\partial H^*}{\partial p} + O(\|p\|^2), \tag{34}$$

$$H^*(w^*, p) = \Theta_2^*(w^*, p) - L_0(w^*) = h^* = \text{const}, \tag{35}$$

$$\Theta_2^*(w^*, p) = \Theta_2\left(w^*, \frac{\partial H^*}{\partial p}\right),$$

де $w^* = (w_1, \ldots, w_{n-l})^T$, $p = (p_1, \ldots, p_{n-l})^T$, $\tilde{G} = (g_{\alpha\kappa})$. Оскільки $\det \tilde{G}(0) \neq 0$, то структура системи (34), (35) дозволяє скористатись схемою, що застосовувалась при доведенні теореми 2. А це дає підставу зробити висновок про справедливість теореми 3.

1. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971. – 635 с.
2. *Thomson W., Tait P.* Treatise on natural phylosophy. – Oxford: Clarendon press, 1867. – V.1. – 727 p.
3 *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
4. *Сосницький С. П.* Про гіроскопічну стабілізацію консервативних систем // Укр. мат. журн. – 1996. – **48,** № 10. – С. 1402–1408.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
6. *Болотин С. В., Негрини П.* Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. – 1993. – № 6. – С. 66–75.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
8. *LaSalle J. P.* Stability theory for ordinary differential equations // J. Different. Equat. – 1968. – **4,** № 1. – P. 57–65.
9. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
10. *Сосницкий С. П.* О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем // Укр. мат. журн. – 1985. – **37,** № 1. – С. 124–127.
11. *Сосницкий С. П.* О неустойчивости равновесия натуральных систем // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – С. 48–61.
12. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Наука, 1977. – Т.2. – 543 с.
13. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
14. *Карапетян А. В.* Некоторые задачи устойчивости движения неголономных систем // Теория устойчивости и ее приложения. – Новосибирск, 1979. – С. 184–190.

Одержано 28.11.96