УДК 517.956

Г. П. Лопушанська (Львів. ун-т)

ОСНОВНІ ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ В ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ

We prove some properties of solutions of an equation $\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial x_1^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial x_2^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial x_3^{2\alpha}} = 0$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$, in a domain $\Omega \subset R^3$ which are similar to the properties of harmonic functions. By using the potential method, we investigate principal boundary-value problems for this equation.

Доведені деякі властивості розв'язків рівняння $\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial x_1^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial x_2^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial x_3^{2\alpha}} = 0$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$ в області $\Omega \subset R^3$, аналогічні властивостям гармонійних функцій. Методом потенціалу досліджено основні граничні задачі для цього рівняння.

Нехай Ω — область в R^3, обмежена замкненою поверхнею S класу C^∞, $\nu(x)$ — орт зовнішньої нормалі до S у точці x. В Ω розглядаємо рівняння

$$Lu(x) \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^{2\alpha} u(x)}{\partial x_i^{2\alpha}} \equiv \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} * (\eta u) \right)_{x_i x_i} = 0, \qquad \alpha \in \left(\frac{1}{2};\ 1\right]. \qquad (1)$$

Тут

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}, \end{cases} \qquad f_{\alpha_i}(x_i) = \begin{cases} \dfrac{\Theta(x_i)}{\Gamma(\alpha_i)} x_i^{\alpha_i - 1}, & \alpha_i > 0, \\ f'_{\alpha_i + 1}(x_i), & \alpha_i \le 0, \end{cases}$$

$$f_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(x) = f_{\alpha_1}(x_1) \cdot f_{\alpha_2}(x_2) \cdot f_{\alpha_3}(x_3),$$

$$h_1 = (1, 0, 0),\ h_2 = (0, 1, 0),\ h_3 = (0, 0, 1),$$

крапкою позначено операцію прямого добутку, $*$ — операцію згортки, $\hat{*}$ — операцію згортки узагальненої функції з основною, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція,

$$\Theta(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i > 0, \\ 0, & x_i < 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3.$$

1. Формули Гріна та формулювання основих граничних задач. Позначимо через $C^{2\alpha}(\Omega)$ клас функцій $u(x)$, визначених і неперервно диференційовних в Ω, для яких неперервні згортки $f_{-2\alpha h_i} * (\eta u)$, $i = 1, 2, 3$, через $C^{2\alpha}(\Omega) \cap C^{2\alpha - 1}(\overline{\Omega})$ — клас $\{ u(x) \in C^{2\alpha}(\Omega):\ f_{(1-2\alpha)h_i} * (\eta u) = \left(f_{(2-2\alpha)h_i} * (\eta u)\right)_{x_i} \in C(\overline{\Omega}),\ i = 1, 2, 3 \}$, через (φ, F) — дію узагальненої функції F на основну φ.

Нехай $u(x) \in C^{2\alpha}(\Omega) \cap C^{2\alpha - 1}(\overline{\Omega})$, $\tilde{u} = \eta u$. Для довільної $\varphi \in D(R^3)$ маємо

$$(\varphi, L\tilde{u}) = (\hat{L}\varphi, \tilde{u}) = \left(\sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \varphi \right)_{x_i x_i},\ \tilde{u} \right) =$$

$$= \int_{\Omega} u(x) \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \varphi \right)_{x_i x_i} dx =$$

$$= \int_S u(x) \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \varphi \right)_{x_i} \nu_i(x)\, dS - \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega u_{x_i} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \varphi \right)_{x_i} dx =$$

$$= \int_S u(x) \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \varphi \right)_{x_i} \nu_i(x)\, dS - \int_S \sum_{i=1}^{3} u_{x_i}(x) \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \varphi \right) \nu_i(x)\, dS +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \varphi \right) dx.$$

Введемо граничні оператори

$$(B_\alpha \varphi)(x) = \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} * (\eta\varphi) \right)_{x_i} \nu_i(x),$$

$$\left(\hat{B}_\alpha \varphi\right)(x) = \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} (\eta\varphi) \right)_{x_i} \nu_i(x).$$

Із попередніх рівностей одержуємо першу формулу Гріна

$$\int_\Omega L u \varphi\, dx = \int_S B_\alpha u \varphi\, ds - \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_{x_i} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} (\eta\varphi) \right)_{x_i} dx \tag{2}$$

та другу формулу Гріна

$$\int_\Omega \left(L u \varphi - u \hat{L} \varphi \right) dx = \int_S \left(B_\alpha u \varphi - u \hat{B}_\alpha \varphi \right) dS, \tag{3}$$

де $u, \varphi \in C^{2\alpha}(\Omega) \cap C^{2\alpha-1}(\overline{\Omega})$, а також $(\varphi, L\tilde{u}) = \left(\varphi, -(B_\alpha u)\,\delta_S + \hat{B}_\alpha^*(u\delta_S)\right)$, δ_S — простий шар на S, $(\varphi, \delta_S) = \int_S \varphi\, ds$, $\left(\varphi, \hat{B}_\alpha^*(u\delta_S)\right) = \int_S u B_\alpha \varphi\, ds$.

Отже, $\tilde{u}(x)$ є розв'язком у $D'(R^3)$ рівняння

$$L\tilde{u} = -(B_\alpha u)\,\delta_S + \hat{B}_\alpha^*(u\delta_S). \tag{4}$$

Із співвідношень (3) та (4) видно, що природно для рівняння (1) розглядати *задачу Діріхле*

$$u|_S = F_1(x), \quad x \in S \tag{5}$$

та *задачу типу Неймана*

$$B_\alpha u|_S = F_2(x), \quad x \in S. \tag{6}$$

Нехай $D(S) = C^\infty(S)$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$, $D'(S)$, $D'(\overline{\Omega})$ — простори лінійних неперервних функціоналів на $D(S)$ та $D(\overline{\Omega})$ відповідно.

Формулювання узагальненої задачі Діріхле. Нехай $F_1 \in D'(S)$. Знайти таку $u \in D'(\overline{\Omega})$, що $\tilde{u}$ задовольняє у $D'(R^3)$ рівняння

$$L\tilde{u} = -F_2 + \hat{B}_\alpha^* F_1, \tag{7}$$

де F_2 — певна, поки що невідома узагальнена функція, $(\varphi, \hat{B}_\alpha^* F_1) = \langle \hat{B}_\alpha \varphi, F_1 \rangle$, $\varphi \in D(R^3)$.

Формулювання узагальненої задачі типу Неймана. Нехай $F_2 \in D'(S)$. Знайти таку $u \in D'(\overline{\Omega})$, що $\tilde{u}$ задовольняє в $D'(R^3)$ рівняння (7), де F_1 — деяка, поки що невідома узагальнена функція.

Оператор L є окремим випадком еліптичного псевдодиференціального оператора (п.д.о.). Його символ $a(\xi) = \sum_{j=1}^{3}(-i\xi_j)^{2\alpha}$, оскільки

$$(2\pi)^{-3}\int_{R^3}\sum_{j=1}^{3}(-i\xi_j)^{2\alpha}(\mathfrak{F}u)(\xi)\,e^{i(x,\xi)}d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-3}\int_{R^3}\int_{R^3}\sum_{j=1}^{3}(-i\xi_j)^{2\alpha}e^{i(x-y,\xi)}u(y)\,dy\,d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-3}\int_{R^3}\int_{R^3}\sum_{j=1}^{3}(-i\xi_j)^{2\alpha}e^{i(t,\xi)}u(x-t)\,dt\,d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-3}\int_{R^3}\int_{R^3}\sum_{j=1}^{3}(-i\xi_j)^{2\alpha}e^{i(x,\xi)}d\xi * u(x) = \left(\sum_{j=1}^{3}f_{-2\alpha h_j}\right)*u(x) = Lu(x).$$

Оператори B_α та $\hat{B}_\alpha$ є граничними п.д.о. із символами

$$b_\alpha(x,\xi) = \sum_{j=1}^{3}\nu_j(x)\,(i\xi_j)^{2\alpha-1} \quad \text{та} \; -b_\alpha(x,\xi).$$

Граничні задачі для п.д.о. у різних функціональних просторах вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 10]). Доведені теореми існування та єдиності, теореми гладкості. Найбільш повно досліджені граничні задачі для гіпоеліптичних п.д.о. з гладкими або однорідними символами. При вивченні аналітичних властивостей розв'язку задачі Коші для параболічного п.д.о. з негладким головним символом [6 – 9] істотно використовується фундаментальний розв'язок. Виходячи із властивостей фундаментальної операції оператора L та формул Гріна, одержуємо зображення розв'язків класичних та узагальнених основних граничних задач для рівняння (1) і досліджуємо їх властивості.

2. Побудова фундаментальної функції. Використаємо метод Радона [11]. Розв'язок у $D'(R^3)$ рівняння $L\omega = \delta$ має вигляд

$$\omega(x) = \int_{S_3}\omega_p((p,x))\,dp, \tag{8}$$

де S_3 — одинична сфера у R^3, $p \in S_3$, $(p,x) = \sum_{i=1}^{3}p_i x_i = \xi$.

За властивостями згортки

$$\sum_{i=1}^{3}f_{-2\alpha h_i}(x)*\omega_p((p,x)) = \left(\sum_{i=1}^{3}p_i^{2\alpha}\right)\left(f_{-2\alpha}*\omega\right)(\xi).$$

Тому

$$L\omega(x) = \int_{S_3}\left(L\omega_p\right)(\xi)\,dS_p = \int_{S_3}\left(\sum_{j=1}^{3}p_j^{2\alpha}\right)\left(f_{-2\alpha}*\omega\right)(\xi)\,dp,$$

а враховуючи зображення $\delta(x) = -(8\pi^2)^{-1}\int_{S_3}\delta''(\xi)\,dp$ [11, с. 96], маємо рівняння у згортках

$$\left(f_{-2\alpha} * \omega_p\right)(\xi) = \left(-8\pi^2 \sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}\right)^{-1} \delta''(\xi).$$

Звідси

$$\omega_p(\xi) = \left(-8\pi^2 \sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}\right)^{-1} \left(f_{2\alpha} * \delta''\right)(\xi) = \left(-8\pi^2 \sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}\right)^{-1} f''_{2\alpha}(\xi).$$

Враховуючи, що $f''((p,x)) = \Delta_x f((p,x))$, одержуємо

$$\omega(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \Delta_x \int_{S_3} \left(\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}\right)^{-1} f_{2\alpha}((p,x))dp = -\frac{1}{8\pi^2 \Gamma(2\alpha)} \Delta_x \int_{S_3} \frac{(p,x)_+^{2\alpha-1} dp}{p_1^{2\alpha} + p_2^{2\alpha} + p_3^{2\alpha}},$$

$$\xi_+^\lambda = \begin{cases} \xi^\lambda, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Звідси видно, що $\omega(x) = 0\left(|x|^{2\alpha-3}\right)$.

3. Деякі властивості розв'язків.

Теорема 1. *Якщо* $u(x) \in C(\Omega)$ *і є узагальненим розв'язком рівняння* (1), *то* $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ *і є класичним розв'язком цього рівняння.*

Доведення. Нехай $u \in C(\Omega)$ і є розв'язком рівняння (1) в узагальненому сенсі, а саме: $\int_\Omega u \hat{L} \varphi dx = 0$ для довільної $\varphi \in D(\Omega)$. Було показано, що $\tilde{u}$ задовольняє у $D'(R^3)$ рівняння (1). Його розв'язок $\tilde{u} = (L\tilde{u}) * \omega$. Оскільки $L\tilde{u} = L \cdot 0 = 0$ в $R^3 \setminus \overline{\Omega}$, то $\operatorname{supp}(L\tilde{u}) \subset S$. Отже,

$$(\varphi, \tilde{u}) = (\omega \hat{*} \varphi,\ L\tilde{u}) = \left(\zeta(y) \int_{R^3} \omega(x-y)\, \varphi(x) dx,\ (L\tilde{u})(y)\right),$$

де $\varphi, \zeta \in D(R^3)$, $\zeta = 1$ в околі S. Зокрема, для довільної $\varphi \in D(\Omega)$

$$(\varphi, \tilde{u}) = (\varphi, u) = \int_\Omega (\,(\zeta(y)\, \omega(x-y),\ L\tilde{u}(y))\,\varphi(x) dx. \tag{9}$$

Отже,

$$u(x) = (\,\zeta(y)\, \omega(x-y), (L\tilde{u})(y)), \quad x \in \Omega, \tag{10}$$

а тому для довільного мультиіндекса k

$$D^k u(x) = \left(\zeta(y)\, D_x^k \omega(x-y),\ L\tilde{u}(y)\right) \in C(\Omega).$$

Зокрема,

$$(Lu)(x) = \left(\zeta(y)\, L_x \omega(x-y), (L\tilde{u})(y)\right) = (0, (L\tilde{u})(y)) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Відзначимо ще деякі властивості розв'язків рівняння (1), аналогічні відповідним властивостям узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. Нехай $u(x)$ — розв'язок рівняння (1) в R^3, g — довільна фінітна узагальнена функція. Тоді $u * g$ також задовольняє рівняння (1).

Дійсно, $L(u * g) = Lu * g = 0 * g = 0$ (за асоціативністю згортки). Звідси, взявши $g = D^k \delta$, одержуємо, що $D^k u(x)$ задовольняє рівняння (1) у R^3 та у Ω, а при $g = \delta(x-y)$, $u(x-y)$ задовольняє це рівняння в R^3.

2. Для розв'язку $u \in C^{2\alpha}(\Omega) \cap C^{2\alpha-1}(\overline{\Omega})$ рівняння (1) та довільної гладкої поверхні $\sigma \subset (\overline{\Omega})$

$$\int_\sigma B_\alpha u \, d\sigma = 0. \tag{11}$$

Це випливає із першої формули Гріна при

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\Omega}, \\ 0, & x \notin U_\delta(\Omega), \end{cases}$$

де $U_\delta(\Omega)$ — δ-окіл області Ω.

Для розв'язку $u \in C^{2\alpha}(\Omega) \cap C^{2\alpha-1}(\overline{\Omega})$ рівняння (1) із (4) та (10) одержуємо

$$\int_S u(y)\,(\hat{B}_\alpha \omega)(x-y)\,dS - \int_S (B_\alpha u)(y)\,\omega(x-y)\,dS = \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{12}$$

3. Нехай $S_\varepsilon(x) = \{y : |y-x| = \varepsilon\}$. Тоді

$$I(x) = \int_{S_\varepsilon(x)} (\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y)\,dS = 1. \tag{13}$$

Дійсно,

$$I(x) = \int_{S_\varepsilon} \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \frac{\partial}{\partial y_i} \omega(x-y) \right) \nu_i(y)\,dS =$$

$$= \int_{S_\varepsilon(x)} \left(\int_{S_3} \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} \frac{\partial}{\partial y_i} \omega_p((x-y,\,p)) \right) dp \right) \nu_i(y)\,dS =$$

$$= -\int_{S_\varepsilon(x)} \left(\int_{S_3} \sum_{i=1}^{3} \left(f_{(1-2\alpha)h_i} \hat{*}\, \omega_p((x-y,\,p)) \right) dp \right) \nu_i(y)\,dS =$$

$$= -\int_{S_\varepsilon(x)} \left(\int_{S_3} \sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha-1} \left(f_{1-2\alpha} * \omega_p \right)((x-y,\,p))\,dp \right) \nu_i(y)\,dS.$$

Оскільки

$$\left(f_{1-2\alpha} * \omega_p \right) = f_1 * f_{-2\alpha} * \omega_p = -f_1 * \left(8\pi^2 \sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha} \right)^{-1} \delta'' = -\left(8\pi^2 \sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha} \right)^{-1} \delta',$$

то

$$I(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|y-x|=\varepsilon} \left(\int_{S_3} \frac{\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha-1}\, \nu_i(y)\, \delta'((x-y,\,p))}{\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}}\, dp \right) dS_y.$$

Відомо [11, с. 95], що $\delta(\xi) = \left. \dfrac{|\xi|^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \right|_{\lambda=-1}$. Тоді

$$\delta'(\xi) = \left. \frac{\lambda |\xi|^{\lambda-1} \operatorname{sgn} \xi}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \right|_{\lambda=-1},$$

$$I(x) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{S_3}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}}\left(\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha-1}\nu_i(y)\frac{\lambda|(x-y,\,p)|^{\lambda-1}\operatorname{sgn}(x-y,\,p)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}dS\right)dp\,\Bigg|_{\lambda=-1}$$

Ввівши на $S_\varepsilon(x)$ сферичну систему координат, провівши відлік від вектора p, знайдемо

$$\int\limits_{S_\varepsilon(x)}\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha-1}\nu_i(y)\,|(x-y,\,p)|^{\lambda-1}\operatorname{sgn}(x-y,\,p)\,dS =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha-1}\,p_i\cos\psi\,\varepsilon^{\lambda-1}|\cos\psi|^{\lambda-1}\operatorname{sgn}\cos\psi\,\varepsilon^2\sin\psi\,d\psi =$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}\,\varepsilon^{\lambda+1}\,2\pi\int\limits_0^{\pi}|\cos\psi|^{\lambda}\sin\psi\,d\psi =$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}\,\varepsilon^{\lambda+1}\,4\pi\int\limits_0^{1} y^{\lambda}\,dy = -\frac{4\pi}{\lambda+1}\,\varepsilon^{\lambda+1}\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}.$$

Отже,

$$I(x) = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{S_3}\frac{4\pi}{\lambda+1}\,\varepsilon^{\lambda+1}\frac{\lambda\,dp}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-1} = -\frac{\lambda\,\varepsilon^{\lambda+1}\,4\pi}{2\pi 2\,\frac{\lambda+1}{2}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-1} =$$

$$= -\frac{\lambda\,\varepsilon^{\lambda+1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-1} = 1.$$

Рівність (13) доведено.

4. Нехай S — поверхня Ляпунова, тоді

$$\int\limits_S(\hat{B}_\alpha(y)\,\omega)(x-y)\,dS = \begin{cases} 1, & x\in\Omega, \\ \frac{1}{2}, & x\in S, \\ 0, & x\notin\overline{\Omega}. \end{cases} \tag{14}$$

Доводиться відомим способом [12], з використанням (13).

5. Із формули (14) відомим способом [12] виводимо формули для граничних значень поверхневих потенціалів, а саме: для довільної $\mu\in C(S)$ рівномірно стосовно $x_0\in S$ існують

$$\lim_{\substack{x\to x_0\in S\\ x\in\Omega\\ x\in R^3\setminus\overline{\Omega}}}\int\limits_S\mu(y)(\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y)dS = \pm\frac{1}{2}\mu(x_0)+\int\limits_S\mu(y)(\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x_0-y)dS, \tag{15}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\in S\\ x\in\Omega\\ x\in R^3\setminus\overline{\Omega}}}\int\limits_S\mu(y)(\hat{B}_\alpha(x_0)\omega)(x-y)dS = \mp\frac{1}{2}\mu(x_0)+\int\limits_S\mu(y)(\hat{B}_\alpha(x_0)\omega)(x-y)dS. \tag{16}$$

Із леми, доведеної в [13], та співвідношень (15), (16) випливає, що рівномірно відносно $y\in S$ для довільної $\varphi\in D(S)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{\pm\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon)(\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x_\varepsilon - y)dS = \pm\frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x)(\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y)dS, \quad (17)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{\pm\varepsilon}} \varphi(x_\varepsilon)(B_\alpha(x)\omega)(x_\varepsilon - y)dS = \mp\frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x)(B_\alpha(x)\omega)(x-y)dS, \quad (18)$$

де $S_{\pm\varepsilon} = \{x_\varepsilon = x\mp\varepsilon\nu(x),\ x\in S\}$.

4. Єдиність розв'язків граничних задач. Нехай u_1, u_2 — два розв'язки класу $C^{2\alpha}(\Omega)\cap C^{2\alpha-1}(\overline{\Omega})$ задачі (1), (5), $u = u_1 - u_2$. Тоді $Lu = 0$ в Ω, $u|_S = 0$. Із першої формули Гріна (2) при $\varphi = \eta u$, враховуючи, що $\eta u|_S = 0$, одержуємо

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_{x_i}\big(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} (\eta u)_{x_i}\big)dx = 0.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{3}\big((\eta u)_{x_i} \hat{*} (\eta u)_{x_i},\ f_{(2-2\alpha)h_i}\big) = 0. \quad (19)$$

Використовуючи перетворення Фур'є $\mathfrak{F}$, маємо

$$\sum_{i=1}^{3}\big(\mathfrak{F}\big[(\eta u)_{x_i} \hat{*} (\eta u)_{x_i}\big],\ \mathfrak{F}\big[f_{(2-2\alpha)h_i}\big]\big) = \sum_{i=1}^{3}\big((\eta u)_{x_i} \hat{*} (\eta u)_{x_i},\ f_{(2-2\alpha)h_i}\big) = 0,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\mathfrak{F}\big[(\eta u)_{x_i}\big]\,\overline{\mathfrak{F}\big[(\eta u)_{x_i}\big]},\ \sigma_i^{2\alpha-2}\right) = \int_{R^3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^{2\alpha-2}\sigma_i^2\,|\mathfrak{F}[(\eta u)]|^2 d\sigma = 0.$$

Звідси $\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^{2\alpha}|\mathfrak{F}[\eta u]|^2 = 0$. Отже, $\operatorname{supp}\mathfrak{F}[\eta u] = \{0\}$. Тому ηu — поліном [12]. Оскільки $(\eta u)(x)\in \mathrm{E}'(R^3)$, то $(\eta u)(x) \equiv C = \mathrm{const}$, $x\in\Omega$. Але тоді (за неперервністю ηu) $\eta u|_S \equiv C$. Отже, $C = 0$.

Зауважимо, що єдиність розв'язку внутрішньої задачі типу Неймана доводиться так само. Із формули (2) при $\varphi = \eta u$, враховуючи, що $B_\alpha u|_S = 0$, одержуємо $\eta u \equiv C = \mathrm{const}$.

Отже, при неперервній F на S розв'язок задачі Діріхле (1), (5) єдиний, розв'язок задачі типу Неймана для рівняння (1) єдиний з точністю до адитивної сталої.

Так само доводиться єдиність розв'язку зовнішньої задачі Діріхле

$$Lu(x) = 0,\quad x\in\Omega_e,\quad u|_S = F_1(x),\quad x\in S,\quad u(x)\to 0 \text{ при } |x|\to\infty \quad (20)$$

та зовнішньої задачі типу Неймана

$$Lu(x) = 0,\quad x\in\Omega_e,\quad B_\alpha u|_S = F_2(x),\quad x\in S,\quad u(x)\to 0 \text{ при } |x|\to\infty. \quad (21)$$

Нехай $\eta_1(x) = \begin{cases}1, & x\in\Omega_e\\ 0, & x\notin\overline{\Omega}_e\end{cases}$. Із першої формули Гріна для області Ω_e при $\varphi = \eta_1 u$, $u = u_1 - u_2$, u_1, u_2 — два довільні розв'язки задачі (20) (або (21)), одержуємо

$$\int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^{3} (\eta_1 u)_{x_i} \left(f_{(2-2\alpha)h_i} \hat{*} (\eta_1 u)_{x_i}\right) dx = 0,$$

а отже, (19) при заміні $\eta(x)$ на $\eta_1(x)$.

Використовуючи перетворення Фур'є, матимемо, що $\eta_1 u$ — поліном. А оскільки $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, то $\eta_1 u \equiv 0$, тобто $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_e$. Отже, розв'язок задачі (20) єдиний, і розв'язок задачі (21) єдиний.

5. Розв'язки основних граничних задач при неперервних граничних даних. Із формули (12) випливає, що розв'язок задачі Діріхле можна записати у вигляді

$$u(x) = \int_S F_1(y)(B_\alpha(y)\,\omega)(x-y)\,dS - \int_S \psi(y)\,\omega(x-y)dS, \qquad x \in \Omega, \tag{22}$$

де $\psi(y)$ знаходиться із умови

$$\int_S \psi(y)\,\omega(x-y)dS = \int_S F_1(x)(B_\alpha(y)\,\omega)(x-y)\,dS, \qquad x \in \Omega_e. \tag{23}$$

Нехай спочатку $F_1(y) \equiv 0$. Функція $u(x) = u_0(x) = -\int_S \psi(y)\,\omega(x-y)dS$, згідно з (23), дорівнює нулеві в $R^3 \setminus \overline{\Omega}$. Тоді

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in R^3 \setminus \overline{\Omega}}} u_0(x) = 0, \tag{24}$$

а також $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in R^3 \setminus \overline{\Omega}}} B_\alpha(x_0)\,u_0(x) = 0$, тобто (за формулою (16))

$$\frac{1}{2}\psi(x_0) + \int_S \psi(y)(B_\alpha(x_0)\omega)(x_0-y)dS = 0, \qquad x_0 \in S. \tag{25}$$

Отже, функція $u_0(x)$ задовольняє рівняння (1) в області Ω і згідно з (24) та за неперервністю поверхневого потенціалу типу простого шару в R^3;

$$u_0\big|_S = \lim_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in \Omega}} u_0(x) = 0. \tag{26}$$

Таким чином, $u_0(x)$ є розв'язком задачі Діріхле для рівняння (1) з нульовою граничною умовою. Із єдиності розв'язку задачі Діріхле $u_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$, а тому $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in \Omega}} B_\alpha(x_0)\,u_0(x) = 0$. Із формули (16)

$$\psi(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in R^3 \setminus \overline{\Omega}}} B_\alpha(x_0)\,u_0(x) - \lim_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in \Omega}} B_\alpha(x_0)\,u(x) = 0.$$

Отже, лінійне однорідне інтегральне рівняння (25) має лише тривіальний розв'язок. Тоді однозначно розв'язуване рівняння

$$\frac{1}{2}\psi(x_0) + \int_S \psi(y)(B_\alpha(x_0)\omega)(x_0-y)dS = g(x_0), \quad x_0 \in S, \tag{27}$$

$$g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in R^3 \setminus \overline{\Omega}}} B_\alpha(x_0)\,u_0(x) \int_S F_1(y)(B_\alpha(y)\,\omega)(x-y)\,dS,$$

до якого так само приходимо із (23) при $F_1(y) \not\equiv 0$. Використовуючи єдиність розв'язку задачі типу Неймана в $R^3 \setminus \overline{\Omega}$, доводимо, що рівняння (27) еквівалентне рівнянню (23). Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $F_1 \in C(S)$. *Існує єдиний розв'язок задачі Діріхле* (1), (5), *який визначається згідно з* (22), (27).

Розглянемо тепер задачу (1), (6). Із формули (3) випливає необхідна умова її розв'язності

$$\int_S F_2\, dS = 0. \tag{28}$$

Із (12) для розв'язку задачі наявне зображення

$$u(x) = \int_S \psi(y)(\hat{B}_\alpha(y)\,\omega)(x-y)dS - \int_S F_2(y)\,\omega(x-y)dS, \quad x \in \Omega, \tag{29}$$

де $\psi(y)$ задовольняє рівняння

$$\int_S \psi(y)(\hat{B}_\alpha(y)\,\omega)(x-y)dS = \int_S F_2(y)\,\omega(x-y)dS, \quad x \in R^3 \setminus \overline{\Omega}. \tag{30}$$

Еквівалентним до (30) є інтегральне рівняння 2-го роду

$$-\frac{1}{2}\psi(x) + \int_S \psi(y)(\hat{B}_\alpha(y)\,\omega)(x-y)dS = \int_S F_2(y)\,\omega(x-y)dS, \quad x \in S. \tag{31}$$

Із зображення

$$(\hat{B}_\alpha(y)\,\omega)(x-y) = \int_{S_3} \frac{\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha-1}\nu_i(y)\,\delta'((p,\, x-y))dp}{8\pi^2\left(\sum_{i=1}^{3} p_i^{2\alpha}\right)}$$

випливає, що спряженим до ядра $(\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y) \in (B_\alpha(x)\omega)(x-y)$, тому спряженим до (31) є інтегральне рівняння

$$-\frac{1}{2}\mu(x_0) + \int_S \mu(y)(B_\alpha(x_0)\,\omega)(x_0-y)dS = 0, \quad x_0 \in S, \tag{32}$$

яке має єдиний лінійно незалежний розв'язок $\mu_0(y)$ такий, що

$$\int_S \mu_0(x)\,\omega(x-y)dS \equiv C_0 = \text{const} \neq 0, \quad x \in \Omega.$$

Умова розв'язності рівняння (31) забезпечується умовою (28). Отже, вірна така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконується* (28). *Існує єдиний з точністю до довільної адитивної сталої розв'язок задачі типа Неймана* (1), (6). *Він визначається згідно з* (29), (31).

Аналогічно вивчаються граничні задачі для рівняння (1) у просторах узагальнених функцій.

6. Розв'язок узагальненої задачі Діріхле. Відомо, що існує єдиний у $\mathrm{E}'(R^3)$ розв'язок рівняння (7) $\tilde{u}(x) = \omega * (\hat{B}^*_\alpha F_1 - F_2)$. Для довільної $\varphi \in D(R^3)$

$$(\varphi, \tilde{u}) = (\varphi,\, \omega * (\hat{B}^*_\alpha F_1 - F_2)) = (\varphi \hat{*} \omega,\, \hat{B}^*_\alpha F_1 - F_2) =$$

$$= \langle \hat{B}_\alpha(\varphi \hat{*} \omega),\ F_1 \rangle - \langle (\varphi \hat{*} \omega),\ F_2 \rangle =$$

$$= \langle \int_{R^3} \varphi(x)(\hat{B}_\alpha(y)\,\omega)(x-y)dx,\ F_1 \rangle - \langle \int_{R^3} \varphi(x)\,\omega(x-y)dx,\ F_2 \rangle.$$

Умова $\tilde{u} = 0$ в $R^3 \setminus \overline{\Omega}$ дає (оскільки $\hat{B}_\alpha(y)\omega$ має точкову особливість)

$$\int_{R^3 \setminus \overline{\Omega}} \varphi(x)\left[\langle (\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y),\ F_1 \rangle - \langle \omega(x-y),\ F_2 \rangle \right] dx = 0,$$

тобто

$$\langle (\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y),\ F_1 \rangle - \langle \omega(x-y),\ F_2 \rangle = 0, \quad x \in R^3 \setminus \overline{\Omega}. \tag{33}$$

Звідси знайдемо невідому узагальнену функцію F_2. Із (33) для довільної $\varphi \in$ $\in D(S)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})\, B_\alpha(x) \left(\langle \omega(x_{-\varepsilon} - y),\ F_2 \rangle - \langle (\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x_{-\varepsilon} - y),\ F_1 \rangle \right) dS = 0,$$

тобто

$$\langle \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})\,(B_\alpha(x)\omega)\,(x_{-\varepsilon} - y)\, dS,\ F_2 \rangle =$$

$$= \langle \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})\, B_\alpha(x)\,(\hat{B}_\alpha(y)\,\omega)\,(x_{-\varepsilon} - y)\, dS,\ F_1 \rangle. \tag{34}$$

Використаємо формулу (18). Тоді за лемою із (13) з існування $\lim_{c \to x_0 \in S} B_\alpha(x) \times$ $\times \int_S \mu(y)\,(\hat{B}_\alpha(y)\,\omega)\,(x-y)\,dS$ випливає

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{B}_\alpha(y) \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})\,(B_\alpha(x)\,\omega)\,(x_{-\varepsilon} - y)\, dS = V_1(y,\varphi) \in D(S).$$

Тепер (34) можна записати у вигляді

$$\langle \frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x)\,(B_\alpha(x)\omega)\,(x-y)\, dS,\ F_2 \rangle = \langle V_1(y,\varphi),\ F_1 \rangle, \quad \varphi \in D(S).$$

Інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x)\,(B_\alpha(x)\omega)\,(x-y)\, dS = g(y) \tag{35}$$

є спряженим до інтегрального рівняння (25), а тому за доведеним вище однозначно розв'язне. Отже, перетворенням

$$\langle g, F_2 \rangle = \langle V_1(y, \varphi_g),\ F_1 \rangle, \quad g \in D(S), \tag{36}$$

де φ_g — розв'язок рівняння (35), однозначно визначається $F_2 \in D'(S)$.

Покажемо, що знайдена узагальнена функція F_2 задовольняє умову (33).

Розглянемо функцію $w(x) = \langle \omega(x-y),\ F_2 \rangle - \langle (\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y),\ F_1 \rangle$, $x \in$ $\in \Omega_e$. Тоді

$$Lw(x) = \langle L\omega(x-y),\ F_2 \rangle - \langle L(\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y),\ F_1 \rangle = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x) = \left\langle \lim_{|x|\to\infty} \omega(x-y),\ F_2 \right\rangle - \left\langle \lim_{|x|\to\infty} (\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y),\ F_1 \right\rangle = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})\,(B_\alpha(x)\,w)\,(x_{-\varepsilon})\,dS_{-\varepsilon} = 0, \quad \varphi \in D(S), \tag{37}$$

згідно з (18) і (36).

Отже, функція $w(x)$ є розв'язком зовнішньої узагальненої задачі типа Неймана для рівняння (1). Покажемо, що $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_e$. Всередині області $\Omega_{e\varepsilon}$, розміщеної поза поверхнею $S_{-\varepsilon}$, вірне зображення розв'язку рівняння (1)

$$w(z) = \int_{S_{-\varepsilon}} \mu_\varepsilon(y_\varepsilon)\,\omega(z-y_\varepsilon)\,dS, \quad z \in \Omega_{e\varepsilon}, \tag{38}$$

де $\mu_\varepsilon(x_{-\varepsilon})$ — розв'язок регулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2}\mu_\varepsilon(x_{-\varepsilon}) + \int_S \mu_\varepsilon(y_{-\varepsilon})\,(B_\alpha(x)\omega)\,(x_{-\varepsilon}-y_{-\varepsilon})\,dS = B_\alpha w(x_{-\varepsilon}).$$

Нехай $\Gamma(x_{-\varepsilon}, y_{-\varepsilon})$ — резольвента ядра цього інтегрального рівняння. Тоді

$$\mu_\varepsilon(y_{-\varepsilon}) = \int_{S_{-\varepsilon}} \Gamma(y_{-\varepsilon}, x_{-\varepsilon})\,(B_\alpha w)(x_{-\varepsilon})\,dS + B_\alpha w(y_{-\varepsilon}).$$

Підставляючи цей вираз для $\mu_\varepsilon(y_{-\varepsilon})$ у (38), одержуємо

$$w(x) = \int_{S_{-\varepsilon}} \Phi_\varepsilon(x_{-\varepsilon}, z)\,(B_\alpha w)(x_{-\varepsilon})\,dS, \quad z \in \Omega_{e\varepsilon}, \tag{39}$$

де

$$\Phi_\varepsilon(x_{-\varepsilon}, z) = \omega(x-z_{-\varepsilon}) + \int_{S_{-\varepsilon}} \Gamma(y_{-\varepsilon}, x_{-\varepsilon})\,\omega(x-y_{-\varepsilon})\,dS.$$

Існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon(x_{-\varepsilon}, z) = \Phi(x, z)$. За лемою [1, с. 65]

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \Phi_\varepsilon(x_{-\varepsilon}, z)\,(B_\alpha w)(x_{-\varepsilon})\,dS = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon(x_{-\varepsilon}, z)\right)(B_\alpha w)(x_{-\varepsilon})\,dS,$$

тому із (39) одержуємо

$$w(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \Phi(x, z)\,(B_\alpha w)(x_{-\varepsilon})\,dS, \quad z \in \Omega_e,$$

а тоді із (37) $w(z) \equiv 0$, $z \in \Omega_e$.

Ми довели єдиність розв'язку зовнішньої узагальненої задачі типу Неймана і показали, що знайдена згідно з формулами (35), (36) узагальнена функція $F_2 \in D'(S)$ задовольняє умову (33).

Співвідношенням (33) визначена єдина узагальнена функція F_2. Дійсно, якщо б існували дві узагальнені функції F_{21}, F_{22}, які задовольняють (33), то $F_2 = F_{21} - F_{22}$ задовольняла б умову

$$\left\langle \omega(x-y),\ F_2 \right\rangle = 0, \quad x \in \Omega_e. \tag{40}$$

Функція $w_1(x) = \left\langle \omega(x-y),\ F_2 \right\rangle$ є розв'язком рівняння $Lw_1(x) = 0$, $x \in \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})\, B_\alpha(x)\, w_1(x_{-\varepsilon})dS = 0, \qquad \varphi \in D(S), \quad w_1(x) \to 0, \quad |x| \to \infty,$$

а тому із єдиності розв'язку зовнішньої узагальненої задачі типу Неймана випливає, як було показано вище, що умова (40) еквівалентна умові

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}} \varphi(x_{-\varepsilon})\, B_\alpha(x) \langle \omega(x_{-\varepsilon}-y),\ F_2\rangle dS = 0, \qquad \varphi \in D(S),$$

тобто

$$\langle \frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x)\,(B_\alpha(x)\omega)\,(x-y)\, dS,\ F_2 \rangle = 0.$$

За однозначною розв'язністю інтегрального рівняння (35) одержуємо, що $\langle g, F_2\rangle = 0$ для довільної $g \in D(S)$, тобто $F_2 = 0$ у $D'(S)$.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 4. *Нехай* $F_1 \in D'(S)$. *Існує єдиний розв'язок* $u(x)$ *узагальненої задачі Діріхле для рівняння* (1). *Він визначається за формулою*

$$u(x) = \langle (\hat{B}_\alpha(y)\omega)(x-y),\ F_1\rangle - \langle \omega(x-y),\ F_2\rangle, \qquad x \in \Omega,$$

а узагальнена функція F_2 *визначається згідно з формулами* (35), (36).

Аналогічно вивчаються узагальнена задача типу Неймана, а також зовнішні узагальнені граничні задачі.

1. *Агранович М. С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 5. – С. 3 – 120.
2. *Вишик М. И., Эскин Г. И.* Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения // Там же. – 1967. – **22**, № 1. – С. 15 – 76.
3. *Вишик М. И., Эскин Г. И.* Уравнения в свертках переменного порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16**. – С. 25 – 50.
4. *Волевич Л. Р.* Гипоэллиптические уравнения в свертках // Докл. АН СССР. – 1966. – **168**, № 6. – С. 1232 – 1235.
5. *Хермандер Л.* Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 690 с.
6. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Мат. исследования. – 1971. – Вып. 63. – С. 18 – 33.
7. *Дрінь Я. М., Ейдельман С. Д.* Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних параболічних систем з негладкими символами // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць. – Чернівці, 1990. – С. 21 – 31.
8. *Кочубей А. М.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 8. – С. 1359 – 1368.
9. *Федорюк М. В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Там же. – 1978. – **14**, № 7. – С. 1296 – 1301.
10. *Grubb G.* Boundery problems for systems of partial differential operators of mixed order // J. Func. Anal. – 1977. – **26**. – P. 131 – 165.
11. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 207 с.
12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
13. *Лопушанская Г. П.* О некоторых свойствах решений нелокальных эллиптических задач в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1487 – 1494.

Одержано 21.10.96