УДК 519. 21

В. В. Булдигін, В. М. Мельник, В. Г. Шпортюк
(Нац. техн. ун-т України "КПІ", Київ)

ПРО ТЕОРЕМИ ЛЕВІ – БАКСТЕРА ДЛЯ ДРОБОВИХ ПОЛІВ. III

We establish sufficient conditions of the singularity of distributions of shot noise fields with response functions of certain form.

Встановлено достатні умови сингулярності розподілів дробових полів з функціями відгуку певного вигляду.

Дана стаття є продовженням робіт [31, 32]. При цьому зберігаються введені в них позначення, нумерація пунктів, тверджень, формул та першоджерел.

5. Про сингулярність мір за методом сум Леві – Бакстера. Нехай $\kappa_1(\bar{t})$, $\kappa_2(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbf{R}^m$, — однорідні дробові поля з функціями відгуку $\varphi_1(\bar{t})$ і $\varphi_2(\bar{t})$, тобто

$$\kappa_1(\bar{t}) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \varphi_1(\bar{t} - \bar{s})\mu(d\bar{s}), \tag{87}$$

$$\kappa_2(\bar{t}) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \varphi_2(\bar{t} - \bar{s})\mu(d\bar{s}). \tag{88}$$

Нехай P_1 і P_2 — розподіли цих полів у функціональному просторі $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^m}$ усіх дійсних функцій $x(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbf{R}^m$.

Лема 4. *Якщо існує така послідовність дійсних вимірних функціоналів* $(F_n(\cdot),\ n \geq 1)$ *на просторі* $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^m}$, *що* $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, F_n(\kappa_1) = B_1$, $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, F_n(\kappa_2) = B_2$ *і* $B_1 \neq B_2$, *то розподіли* P_1 *і* P_2 *— сингулярні.*

Доведення. З умови леми випливає, що $F_n(\kappa_1) \xrightarrow[n\to\infty]{P} B_1$. Отже, існує підпослідовність функціоналів $(F_{n_{1k}}(\cdot),\ k > 1)$ така, що

$$P\left\{F_{n_{1k}}(\kappa_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} B_1\right\} = 1.$$

Аналогічно доводиться, що існує підпослідовність $(F_{n_{2k}}(\cdot),\ k > 1)$ така, що $P\left\{F_{n_{2k}}(\kappa_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} B_2\right\} = 1$. Оскільки $B_1 \neq B_2$, то розподіли P_1 і P_2 — сингулярні. Лему доведено.

Теорема 7. *Якщо* κ_1, κ_2 *— однорідні поля вигляду* (87) *і* (88) *з функціями відгуку* $\varphi_1(\bar{t})$ *і* $\varphi_2(\bar{t})$, *перетворення Фур'є яких задовольняють умови:*

1) $\left|\hat{\varphi}_i(\overline{\lambda})\right| = M_i \|\overline{\lambda}\|^{-\beta_i} + o(\|\overline{\lambda}\|^{-\beta_i})$ *при* $\|\overline{\lambda}\| \to \infty$, $M_i > 0$, $\beta_i > m$, $i = 1, 2$;

2) $\lim\limits_{\|\overline{\lambda}\|\to\infty} \dfrac{\left|\hat{\varphi}_1(\overline{\lambda})\right|}{\left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right|} \neq 1,$

то розподіли цих полів у функціональному просторі $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^m}$ *будуть сингулярними.*

Доведення. Зауважимо, що умова

$$\lim_{\|\overline{\lambda}\|\to\infty} \frac{\left|\hat{\varphi}_1(\overline{\lambda})\right|}{\left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right|} \neq 1$$

еквівалентна тому, що $(M_1, \beta_1) \neq (M_2, \beta_2)$.

Припустимо, що $\beta_1 \leq \beta_2$, і виберемо за послідовність функціоналів $F_n(\cdot)$ послідовність сум:

$$F_n(\kappa) = c_n \alpha_n^{-m} \sum_{\overline{k}=\overline{1}}^{\overline{N}} \left[\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\overline{p}} \kappa((\overline{k}-\overline{1})\tau_n\alpha_n) \right]^2, \qquad n \geq 1.$$

При цьому послідовності $\{c_n,\ n \geq 1\}$, $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$, $\{\alpha_n,\ n \geq 1\}$ і порядок різницевого оператора $\overline{p}$ виберемо так, щоб послідовність $F_n(\kappa_1)$ мала бакстерову властивість.

Згідно з теоремою 5, для цього досить взяти $\overline{p} = \overline{p}(\beta_1) = k$, якщо $2km - m < 2\beta_1 \leq 2km + m$;

$$c_n = \begin{cases} (\alpha_n\tau_n)^{2m-2\beta_1}, & \text{якщо } 2\beta_1 \neq 2km+m; \\ (\alpha_n\tau_n)^{2m-2\beta_1}\left|\ln(\alpha_n\tau_n)\right|^{-1}, & \text{якщо } 2\beta_1 = 2km+m, \end{cases}$$

а $(\tau_n,\ n \geq 1)$ і $(\alpha_n,\ n \geq 1)$ вибрати так, щоб виконувались умови $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n\tau_n = 0$.

Як і при доведенні теореми 5, розглянемо окремо випадки $2mp - m < 2\beta_1 < 2pm + m$ і $2\beta_1 = 2pm + m$. Також будемо розрізняти випадки $\beta_1 = \beta_2$ і $\beta_1 < \beta_2$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $2pm - m < 2\beta_1 < 2pm + m$ і $\beta_1 = \beta_2$. Тоді обов'язково $M_1 \neq M_2$. Згідно з теоремою 5,

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} F_n(\kappa_1) = \lim_{n\to\infty} (\sigma_2 + \sigma_w^2)\, c_n\, (\alpha_n\tau_n)^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin\frac{\lambda_r\alpha_n\tau_n}{2})^{2p} \right) \left|\hat{\varphi}_1(\overline{\lambda})\right|^2 d\overline{\lambda} =$$

$$= M_1^2(\sigma_2 + \sigma_w^2) 2^{m-2\beta_1} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin u_r)^{2p} \right) \|\overline{u}\|^{-2\beta_1} d\overline{u} = C_1,$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} F_n(\kappa_2) = \lim_{n\to\infty} (\sigma_2 + \sigma_w^2)\, c_n\, (\alpha_n\tau_n)^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin\frac{\lambda_r\alpha_n\tau_n}{2})^{2p} \right) \left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right|^2 d\overline{\lambda} =$$

$$= M_2^2(\sigma_2 + \sigma_w^2) 2^{m-2\beta_1} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin u_r)^{2p} \right) \|\overline{u}\|^{-2\beta_1} d\overline{u} = C_2.$$

Тому $C_1 \neq C_2$. З леми 4 випливає, що розподіли P_1 і P_2 — сингулярні. Отже, у випадку, коли $2pm - m < 2\beta_1 < 2pm + m$ і $\beta_1 = \beta_2$, теорему доведено.

Розглянемо випадок, коли $2pm - m < 2\beta_1 < 2pm + m$ і $\beta_1 < \beta_2$. Оскільки

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} F_n(\kappa_1) = M_1^2(\sigma_2+\sigma_w^2)2^{m-2\beta_1}\int_{\mathbf{R}^m}\left(\prod_{r=1}^m(2\sin u_r)^{2p}\right)\|\overline{u}\|^{-2\beta_1}d\overline{u} = C_1 \neq 0,$$

то для доведення достатньо показати що

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} F_n(\kappa_2) = 0. \tag{89}$$

В свою чергу, (89) випливає зі співвідношень $\mathbf{E}(F_n(\kappa_2)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ і $\mathbf{D}(F_n(\kappa_2)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Згідно з умовою 1, $\left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right| = M_2\left\|\overline{\lambda}\right\|^{-\beta_2} + g(\overline{\lambda})\left\|\overline{\lambda}\right\|^{-\beta_2}$ при $\left\|\overline{\lambda}\right\| \to \infty$, де $\lim\limits_{\|\overline{\lambda}\|\to\infty} g(\overline{\lambda}) = 0$. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $B = B(\varepsilon) \geq 1$, що $\left|g(\overline{\lambda})\right| < \varepsilon$ при $\left\|\overline{\lambda}\right\| > B$.

Зафіксуємо довільне ε і виберемо відповідне B. Тоді (див. доведення теореми 5)

$$\mathbf{E}(F_n(\kappa_2)) = (\sigma_2+\sigma_w^2)c_n(\alpha_n\tau_n)^{-m}\int_{\mathbf{R}^m}\left(\prod_{r=1}^m(2\sin\frac{\lambda_r\alpha_n\tau_n}{2})^{2p}\right)\left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right|^2 d\overline{\lambda} =$$

$$= I_{11} + I_{12},$$

де

$$I_{11} = (\sigma_2+\sigma_w^2)c_n(\alpha_n\tau_n)^{-m}\int_{\|\overline{\lambda}\|\leq B}\left(\prod_{r=1}^m(2\sin\frac{\lambda_r\alpha_n\tau_n}{2})^{2p}\right)\left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right|^2 d\overline{\lambda},$$

$$I_{12} = (\sigma_2+\sigma_w^2)c_n(\alpha_n\tau_n)^{-m}\int_{\|\overline{\lambda}\|> B}\left(\prod_{r=1}^m(2\sin\frac{\lambda_r\alpha_n\tau_n}{2})^{2p}\right)\left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right|^2 d\overline{\lambda}$$

та виконується нерівність

$$I_{11} \leq (\sigma_2+\sigma_w^2)\left(\frac{B}{2}\right)^{2mp}(\alpha_n\tau_n)^{2mp+m-2\beta_1}\int_{\|\overline{\lambda}\|\leq B}\left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right|^2 d\overline{\lambda}.$$

Зважаючи на те, що $\int\limits_{\|\overline{\lambda}\|\leq B}\left|\hat{\varphi}_2(\overline{\lambda})\right|^2 d\overline{\lambda} < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n\tau_n) = 0$ і за припущенням $2mp + m > 2\beta_1$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} I_{11} = 0$.

Оскільки за припущенням $\beta_1 \leq 2pm + m$ і $\beta_1 < \beta_2$, то існує $\delta > 0$ таке, що $\beta_1 < \beta_2 - \delta < 2pm + m$. Зафіксуємо δ. Тоді, спираючись на доведення теореми 5, неважко отримати оцінку

$$0 \leq I_{12} \leq K(\alpha_n\tau_n)^{2\delta},$$

де $K < \infty$. Звідси з урахуванням того, що $\delta > 0$, випливає $\lim\limits_{n\to\infty} I_{12} = 0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}(F_n(\kappa_2)) = 0$. Аналогічно, спираючись на доведення теореми 5, легко показати, що

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{D}(F_n(\kappa_2)) = 0.$$

Таким чином, і у цьому випадку розподіли P_1 і P_2 — сингулярні.

Доведення теореми у випадку, коли $\beta_1 = 2pm + m$ і $\beta_1 < \beta_2$, повторює доведення теореми у попередньому випадку з тією різницею, що зміниться вигляд нормуючої послідовності і тому у відповідних місцях з'являться нормуючі логарифмічні множники. Це ж саме стосується і випадку, коли $\beta_1 = \beta_2 = 2mp + m$. Теорему доведено.

Аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема 8. *Якщо* κ_1, κ_2 — *однорідні дробові поля* (87) *і* (88) *з функціями відгуку, перетворення Фур'є яких задовольняють умови:*

1) $$\left|\hat{\varphi}_i(\bar{\lambda})\right| = M_i \prod_{r=1}^{m} |\lambda_r|^{-\beta_{r_i}/2} + o\left(\prod_{r=1}^{m} |\lambda_r|^{-\beta_{r_i}/2}\right) \text{ при } \sup_{1 \le r \le m} |\lambda_r| \to \infty, \ \lambda_r \ne 0,$$ $r = \overline{1, m}$, *де* $M_i > 0$, $\beta_{r_i} > 2$, $i = 1, 2$;

2) $$\lim_{\sup_{1 \le r \le m} |\lambda_r| \to \infty} \frac{\left|\hat{\varphi}_1(\bar{\lambda})\right|}{\left|\hat{\varphi}_2(\bar{\lambda})\right|} \ne 1,$$

то розподіли цих полів у функціональному просторі $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^m}$ *будуть сингулярними.*

31. *Булдигін В. В., Мельник В. М., Шпортюк В. Г.* Про теореми Леві – Бакстера для дробових полів. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1463 – 1476.
32. *Булдигін В. В., Мельник В. М., Шпортюк В. Г.* Про теореми Леві – Бакстера для дробових полів. II // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 12 – 31.

Одержано 26.03.97