УДК 517.929.4

Д. Я. Хусаинов, Н. С. Никифорова (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We consider a linear homogeneous difference equation of order n with positive coefficients, which is presented in the normal form. We obtain necessary and sufficient conditions of the stability and asymptotic stability.

Розглядається лінійне однорідне різницеве рівняння n-го порядку з додатними коефіцієнтами, записане в нормальній формі. Отримано необхідні та достатні умови стійкості та асимптотичної стійкості.

Исследование линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$x^n(t) = p_1 x^{(n-1)}(t) + p_2 x^{(n-2)}(t) + \ldots + p_n x(t)$$

не вызывает принципиальных трудностей. Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n = 0$$

имели отрицательные действительные части. Это утверждение можно проверить с использованием критериев Гурвица, Льенара – Шипара, Михайлова и т. д. [1].

Значительная часть моделей в биологии, медицине и других областях описывается разностными уравнениями с положительными коэффициентами [2]

$$x(k) = p_1 x(k-1) + p_2 x(k-2) + \ldots + p_n x(k-n), \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad (1)$$
$$p_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Критерием асимптотической устойчивости является выполнение условия $|z_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$, где z_i — корни соответствующего характеристического уравнения

$$z^n - p_1 z^{n-1} - p_2 z^{n-2} - \ldots - p_n = 0. \qquad (2)$$

Однако простой и эффективный критерий проверки приведенного утверждения авторам не известен. В предлагаемой работе получено необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости уравнения (1). Обозначим

$$R_0 = p_1 + p_2 + \ldots + p_n. \qquad (3)$$

Теорема. *Чтобы уравнение* (1) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы* $R_0 \le 1$.

Доказательство. I. Рассмотрим случай $R_0 = 1$. Нетрудно проверить, что в этом случае характеристическое уравнение (2) имеет корень $z_1 = 1$.

1. Покажем, что $z_1 = 1$ — корень кратности единица. Предположим, что кратность этого корня $r > 1$. Тогда $z_1 = 1$ — множитель производной характеристического многочлена, т. е. корень уравнения [3]

$$n z^{n-1} - (n-1) p_1 z^{n-2} - \ldots - p_{n-1} = 0,$$

или должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, p_k \;=\; n. \tag{4}$$

По предположению $R_0 = 1$ и, следовательно, $\sum_{k=1}^{n} np_k = n$. Преобразовав соотношение (4) к виду

$$-\sum_{k=1}^{n} k p_k \;=\; 0,$$

получаем противоречие, так как $p_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Таким образом, $z_1 = 1$ — простой корень уравнения (2).

2. Покажем, что уравнение (2) не имеет действительных корней, по модулю больших единицы. Представим характеристический полином

$$f(z) \;=\; z^n - p_1 z^{n-1} - p_2 z^{n-2} - \ldots - p_n \tag{5}$$

в виде

$$\frac{1}{z^{n-1}} f(z) \;=\; P_1(z) - Q_{n-1}(z), \quad P_1(z) \;=\; z,$$

$$Q_{n-1}(z) \;=\; p_1 + \frac{p_2}{z} + \frac{p_3}{z^2} + \ldots + \frac{p_n}{z^{n-1}}.$$

Поскольку при $z = 1$ выполняется $p_1(1) - Q_{n-1}(1) = 0$, а при $z > 1$, $z \to +\infty$ функция $P_1(z)$ монотонно возрастает, а $Q_{n-1}(z)$ монотонно убывает, то для действительного $z > 1$

$$\frac{1}{z^{n-1}} f(z) \;=\; P_1(z) - Q_{n-1}(z) \;>\; 0.$$

3. Покажем, что $f(z)$ не имеет комплексных корней, модуль которых меньше единицы. Предположим, что имеется корень $z_s = Ae^{i\varphi}$, $A > 1$, т.е. $f(Ae^{i\varphi}) = 0$, но тогда

$$\left|\frac{1}{z_s^{n-1}} f(z_s)\right| \;\geq\; \left|Ae^{i\varphi}\right| - a_1 - a_2 \left|Ae^{i\varphi}\right|^{-1} - \ldots - a_n \left|Ae^{i\varphi}\right|^{-n+1} \;=$$

$$=\; A - a_1 - a_2 A^{-1} - \ldots - a_n A^{-n+1} \;>\; 0,$$

что противоречит предположению о том, что $z_s = Ae^{i\varphi}$ — корень уравнения (2).

4. Покажем, что $z_s = -1$ не является корнем уравнения (2). Предположим, что $z_s = -1$ — корень уравнения (2). Тогда

$$(-1)^n \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} p_k.$$

И, следовательно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} p_k\right| \;=\; 1.$$

Однако, по допущению, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ и $p_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} p_k\right| \;<\; \sum_{k=1}^{n} p_k \;=\; 1,$$

что противоречит предположению.

Таким образом, при $R_0 = 1$ характеристическое уравнение (2) имеет один корень $z_1 = 1$, а остальные по модулю меньше единицы и, следовательно, уравнение (1) устойчиво по Ляпунову.

II. Рассмотрим случай $R_0 \neq 1$. Покажем, что в этом случае для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $R_0 < 1$.

Пусть характеристическое уравнение (2) имеет корни $|z_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$, и предположим, что $R_0 > 1$. Произведем замену $z = (1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}$, в результате которой внутренность круга $|z| < 1$ области изменения комплексной переменной z преобразуется в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < 0$ изменения переменной λ, а уравнение (2) — в уравнение

$$(1+\lambda)^n = \sum_{i=1}^{n} p_i (1+\lambda)^{n-i} (1-\lambda)^i. \tag{6}$$

Преобразуем уравнение (6) к нормальному виду. Проведем замену $1 - \lambda = t$ и рассмотрим правую часть (6)

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i (2-t)^{n-i} t^i.$$

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, получаем

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i t^i \left[\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k C_{n-i}^k t^k 2^{n-i-k} \right].$$

После некоторых преобразований имеем

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} t^k 2^{n-k} \sum_{i=1}^{k} p_i (-1)^{k-i} C_{n-i}^{k-i}.$$

Поскольку $C_{n-i}^{k-i} = C_{n-i}^{n-k}$, перепишем полученное выражение в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k t^k, \qquad b_k = 2^{n-k} \sum_{k=1}^{n} p_i (-1)^{k-i} C_{n-i}^{n-k}.$$

Положим далее $\lambda = 1 - t$:

$$f(1-\lambda) = \sum_{k=1}^{n} b_k (1-\lambda)^k.$$

Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$f(1-\lambda) = \sum_{k=1}^{n} b_k \left[\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \lambda^j \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=j}^{n} (-1)^j C_k^j b_k \right] \lambda^j.$$

Будем считать, что при $j > i$ $C_i^j = 0$. Поэтому

$$\sum_{k=j}^{n} \alpha_k C_k^j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k C_k^j$$

и

$$f(1-\lambda) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \lambda^j \left[\sum_{k=1}^{n} C_k^j \left(\sum_{i=1}^{k} p_i (-1)^{k-i} C_{n-i}^{n-k} 2^{n-k} \right) \right].$$

После преобразований получаем

$$f(1-\lambda) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \lambda^j \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_{n-k}^i 2^{n-k-i} C_{i+k}^j \right) \right].$$

Поскольку

$$(1+\lambda)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \lambda^j,$$

то уравнение (6) примет вид

$$\sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i+j} C_{n-k}^i 2^{n-k-i} C_{i+k}^j - C_n^j \right) \right] \lambda^j = 0. \tag{7}$$

Таким образом, после преобразования получили характеристическое уравнение вида

$$q_n \lambda^n + q_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + q_0 = 0, \tag{8}$$

где

$$q_j = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i+j} C_{n-k}^i 2^{n-k-i} C_{i+n}^j \right) - C_n^j, \quad j = \overline{0, n}. \tag{9}$$

Подсчитаем коэффициент q_0:

$$q_0 = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_{n-k}^i 2^{n-k-i} \right) - 1 = \sum_{k=1}^{n} p_k (2-1)^{n-k} - 1 > 0.$$

Поэтому, чтобы выполнялись необходимые условия устойчивости, требуется, чтобы остальные $q_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Покажем, что при предположении $R_0 > 1$ это не будет выполняться. А именно, не только $q_j \not> 0$, $j = \overline{0, n}$, но и их сумма не будет положительной. Воспользовавшись зависимостью (9), получим

$$\sum_{j=0}^{n} q_j = \sum_{j=0}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{i+j} C_{n-k}^i 2^{n-k-i} C_{i+k}^j \right) \right] - \sum_{j=0}^{n} C_n^j.$$

Поскольку $C_{i+k}^j = 0$ при $j > i + k$ и $\sum_{i=0}^{n} C_n^j = 2^n$, то поставив первую сумму на последнее место, получим

$$\sum_{j=0}^{n} q_j = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_{n-k}^i 2^{n-k-i} \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_{i+k}^j \right) \right) - 2^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_{n-k}^i 2^{n-k-i} \left(\sum_{j=0}^{i+k} (-1)^j C_{i+k}^j \right) \right) - 2^n.$$

И так как

$$\sum_{j=0}^{i+k} (-1)^j C_{i+k}^j = (1-1)^{i+k} = 0,$$

окончательно получаем $\sum_{j=0}^{n} q_j = -2^n$, что противоречит предположению об устойчивости характеристического полинома (8), или условию $|z_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$. Таким образом, допущение неверно и $R_0 < 1$.

Покажем, что справедливо и обратное. Если коэффициенты $p_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, такие, что $R_0 < 1$, то уравнение (1) асимптотически устойчиво. Пусть $x(-n)$, $x(-n+1), \ldots, x(-1)$ — произвольно взятые начальные условия решения уравнения (1) и

$$\|x_0\| = \max\{|x(-n)|, |x(-n+1)|, \ldots, |x(-1)|\}.$$

Тогда

$$|x(0)| = |p_1 x(-1) + p_2 x(-2) + \ldots + p_n x(-n)| \le R_0 \|x_0\|.$$

Для следующего шага получаем

$$|x(1)| \le |p_1 x(1) + p_2 x(0) + \ldots + p_n x(-n+2)| \le$$
$$\le (p_1 R_0 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n)\|x_0\|.$$

Далее

$$|x(2)| \le |p_1 x(1) + p_2 x(0) + \ldots + p_n x(-n+2)| \le$$
$$\le (p_1 R_0 + p_2 R_0 + p_3 + \ldots + p_n)\|x_0\|.$$

Проделав n шагов, получим

$$|x(n)| \le (p_1 R_0 + p_2 R_0 + \ldots + p_n R_0)\|x_0\| = R_0^2 \|x_0\|.$$

Аналогично для $2n$ шагов будет выполняться

$$|x(2n)| \le R_0^3 \|x_0\|.$$

Поскольку $0 < R_0 < 1$, то получаем экспоненциальную сходимость с оценкой

$$|x(k)| \le R_0^{[k/n]+1} \|x_0\|,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 172 с.
2. *Selva J. A., Halam T. G.* Compensation and stability in nonlinear matrix modells // Math. Biosci. – 1992. – **110**, № 1. – P. 67 – 101
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Получено 02.04.97