УДК 517.9

А. М. Самойленко, А. А. Эльназаров (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ИНВАРИАНТНОМ ТОРЕ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

We obtain conditions for the existence and smoothness of the invariant torus of countable systems of differential equations with delay.

Отримано умови існування та гладкості інваріантних торів зліченних систем диференціальних рівнянь із запізненням.

В настоящей статье применяется метод редукции бесконечномерной задачи на случай конечномерных систем дифференциальных уравнений растущей размерности. Следует отметить, что при отсутствии запаздывания решение этой задачи приведено в [1]. Исследованию инвариантных торов конечномерных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием посвящено множество работ (см., например, [2, 3]).

1. Обозначения и основные понятия. Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$. Выделим в $\mathfrak{M}$ область S вида

$$S = \{x\colon \|x\| \le d, 0 < d < \infty\}.$$

Под $C^r_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ будем понимать множество непрерывных, ограниченных вместе со своими производными до r-го порядка включительно функций таких, что сами эти функции и их частные производные до r-го порядка удовлетворяют условию Липшица на кубе периодов $\mathcal{T}_m$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi)x(t) + A(\varphi)x(t-h) + f(\varphi), \tag{1}$$

где $h = \mathrm{const} > 0$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathfrak{M}$, $f(\varphi)$, $A(\varphi)$, $P(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $a(\varphi) \in C^r_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$.

Как обычно, функция $x = u(\varphi) = (u_1(\varphi), u_2(\varphi), \dots)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, будет определять инвариантный тор системы уравнений (1), если $u(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, функции $u_i(\varphi_t(\varphi))$, $i = 1, 2, \dots$, непрерывно дифференцируемы по t и

$$\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))u(\varphi_t(\varphi)) + A(\varphi_t(\varphi))u(\varphi_{t-h}(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi))$$

для любых $t \in R^1$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$; $\varphi_t(\varphi)$ — решение первой системы уравнений (1) такое, что $\varphi_0(\varphi) = \varphi$.

Под $\overset{(n)}{\mathbf{A}}(\varphi)$ и $\overset{(n)}{\mathbf{P}}(\varphi)$ будем понимать укороченные матрицы, образованные левым угловым блоком порядка n^2 матриц $A(\varphi)$ и $P(\varphi)$ соответственно. Пусть $\overset{(n)}{x} = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn})$ — вектор, состоящий из первых n координат вектора $x \in \mathfrak{M}$.

Определим последовательность

$$\overset{(n)}{u}{}^0 \equiv 0, \qquad \mathfrak{T}_n^{k+1}\colon \overset{(n)}{x} = \overset{(n)}{u}{}^{k+1}(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m, \qquad k = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

торов, каждый из которых является инвариантным тором системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{\mathbf{P}}(\varphi_t(\varphi))\overset{(n)}{x} + \overset{(n)}{\mathbf{A}}(\varphi_t(\varphi))\overset{(n)}{u}{}^{k}(\varphi_{t-h}(\varphi)) + \overset{(n)}{f}(\varphi_t(\varphi)), \tag{3}$$

где $\overset{(n)}{f}(\varphi) = (f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_n(\varphi))$. Пусть $\overset{(n)}{\Omega}{}^t_\tau(\varphi)$ — матрицант однородной системы

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{\mathbf{P}}(\varphi)\overset{(n)}{x}.$$

Согласно [1], множество матриц $C(\varphi)$, элементы которых непрерывны по φ и удовлетворяют неравенству

$$\sup_{s=1,2\dots} \sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \left|c_{sj}(\varphi)\right| = c_0 < \infty,$$

обозначим через C_φ.

2. Существование инвариантного тора. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям*:

1) $P(\varphi),\ A(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m) \cap C_\varphi,\ f(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m),\ a(\varphi) \in C^0_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$;

2) $\sum_{j=n+1}^{\infty} \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \left|p_{sj}(\varphi)\right| \le K\varepsilon(n),\ s = 1, 2, \dots,$ *где* K — *положительная постоянная*, $\varepsilon(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$;

3) $\left\|\overset{(n)}{\Omega}{}^0_\tau(\varphi)\right\| \le N\exp\{\gamma\tau\},\ \tau \le 0;\ N, \gamma = \mathrm{const},$ *не зависящие от* n *и* φ;

4) *выполняются неравенства*

$$q = \frac{\|A\|Ne^{-\gamma h}}{\gamma} < 1, \qquad \frac{\|f\|N}{\gamma(1-q)} \le d.$$

Тогда в области S

$$u_j = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{u}{}^k_j(\varphi), \qquad j = 1, 2, \dots,$$

равномерно по φ *и* $\mathfrak{T}: x = u(\varphi) = (u_1(\varphi), u_2(\varphi), \dots),\ \varphi \in \mathcal{T}_m$, *является инвариантным тором системы* (1).

Укажем основные моменты доказательства этой теоремы. Если система (1) удовлетворяет условиям $1-4$, то в области S существует последовательность торов $\mathfrak{T}^k$, каждый из которых является инвариантным тором системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x + A(\varphi_t(\varphi))u^k(\varphi_{t-h}(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)), \tag{4}$$

где

$$u^k_j = \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{u}{}^k_j(\varphi), \qquad k = 1, 2, \dots, \qquad j = 1, 2, \dots,$$

равномерно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Если обозначить через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ матрицант однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x,$$

то для доказательства этого утверждения достаточно показать справедливость соотношения

$$\Omega_t^0(\varphi)A(\varphi_t(\varphi))u^k(\varphi_{t-h}(\varphi)) = \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{\Omega}{}_t^0(\varphi) \overset{(n)}{A}(\varphi_t(\varphi)) \overset{(n)}{u}{}^k(\varphi_{t-h}(\varphi)) \tag{5}$$

и установить, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \overset{(n)}{\Omega}{}_\tau^0(\varphi) \overset{(n)}{A}(\varphi_t(\varphi)) \overset{(n)}{u}{}^k(\varphi_{t-h}(\varphi))dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{\Omega}{}_\tau^0(\varphi) \overset{(n)}{A}(\varphi_t(\varphi)) \overset{(n)}{u}{}^k(\varphi_{t-h}(\varphi))dt. \tag{6}$$

Сходимость в (5) и (6) понимается покоординатно. При этом установлена следующая оценка:

$$\left\|u^k(\varphi)\right\| \le \frac{\|f\|N}{\gamma}\frac{1}{1-q} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

$$q = \frac{\|A\|Ne^{-\gamma h}}{\gamma} < 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Далее доказано, что если последовательность инвариантных торов $\mathfrak{T}^{(k)}$ системы (4) определена последовательностью функций $u^{(k)}(\varphi) \in \mathcal{T}_m$, ограниченных по норме $\|\cdot\|$ постоянной d, то $u_j(\varphi) = \lim_{k\to\infty} u_j^k(\varphi)$ и $u(\varphi) = (u_1(\varphi), u_2(\varphi), \ldots)$ — инвариантный тор системы уравнений (1). Доказательство этого утверждения опирается на лемму 12.1 работы [1].

3. О гладкости инвариантного тора. Предположим

$$\alpha = \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \max_{\|\eta\|=1} \left\|\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\eta\right\|, \quad \eta \in R^m.$$

Известно [4], что решение $\varphi_t(\varphi)$ первого уравнения системы (1) удовлетворяет неравенству

$$\left\|\frac{\partial\varphi_t(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right\| \le L_1 \exp\{\alpha|t|\}, \quad t \in R^1, \tag{7}$$

где L_1 — положительная постоянная, не зависящая от φ, t. Пусть υ — постоянная, определяемая неравенством

$$\gamma > \alpha + \frac{\nu\alpha}{1+\nu}. \tag{8}$$

Обозначим

$$l = \max\left\{\alpha + mL_1N\|A\|e^{-\alpha h},\right.$$

$$\left.\frac{2\nu\alpha}{1+\nu} + N\|A\|mL_1e^{\alpha\nu h/(1+\nu)}, \frac{\alpha\nu}{1+\nu} + N\|A\|e^{\alpha\nu h/(1+\nu)}\right\}.$$

Условия непрерывной дифференцируемости инвариантного тора содержатся в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1; функции* $a(\varphi)$, $P(\varphi)$, $A(\varphi)$, $f(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$ *и справедлива оценка* $\gamma > l$. *Тогда инвариантный тор* $\mathfrak{T}: x = u(\varphi)$ *системы уравнений (1) принадлежит пространству* $C^1(\mathcal{T}_m)$.

Доказательство опирается на следующие неравенства [5]:

$$\left\| \frac{\partial \overset{(n)}{\Omega}{}^0_t(\varphi)}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \overset{(n)}{\Omega}{}^0_t(\overline{\varphi})}{\partial \varphi_i} \right\| \le \psi_0 \| \varphi - \overline{\varphi} \|^{\nu/(\nu+1)} \exp\left\{ \left(\gamma - \alpha - \frac{\nu\alpha}{1+\nu} \right) t \right\},$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi_t(\varphi)}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \varphi_t(\overline{\varphi})}{\partial \varphi_i} \right\| \le \Psi \| \varphi - \overline{\varphi} \|^{\nu/(\nu+1)} \exp\left\{ \left(\alpha + \frac{\nu\alpha}{1+\nu} \right) t \right\},$$

где ψ_0, Ψ — постоянные, не зависящие от n, t, φ, $\overline{\varphi}$; $t \le 0$. При этом установлены оценки

$$\left\| \frac{\partial \overset{(n)}{u}{}^k(\varphi)}{\partial \varphi_i} \right\| < R, \tag{9}$$

$$\left\| \frac{\partial \overset{(n)}{u}{}^k(\varphi)}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \overset{(n)}{u}{}^k(\overline{\varphi})}{\partial \varphi_i} \right\| \le G \| \varphi - \overline{\varphi} \|^{\nu/(\nu+1)}, \tag{10}$$

где R, G — положительные постоянные, не зависящие от n, t, φ, $\overline{\varphi}$. Неравенства (9), (10) означают равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность первых производных последовательности функций $\overset{(n)}{u}{}^k(\varphi)$, $k = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, что с использованием леммы Арцела приводит к доказательству утверждения теоремы.

1. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
2. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические решения систем с запаздыванием. – Киев: Наук. думка, 1979. – 234 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 213 с.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.

Получено 17.02.99