УДК 519.624

В. С. Дейнека, І. В. Сергієнко, В. В. Скопецький
(Ін-т кібернетики НАН України, Київ)

ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ З РОЗРИВНИМИ ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ ТА ЇХ ЧИСЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

We consider new eigenvalue problems with discontinuous eigen-functions. We construct computational algorithms which are not worse in precision than similar ones known for problems with smooth eigen-functions.

Розглянуто нові задачі на власні значення з розривними власними функціями. Побудовано обчислювальні алгоритми, які за точністю не гірші за аналогічні, відомі для задач з гладкими власними функціями.

Проектування об'єктів довільного призначення, що вміщують тонкі прошарки матеріалів, які суттєво відрізняються своїми фізичними характеристиками від відповідних характеристик основного середовища, вимагає знаходження розривних розв'язків рівнянь з частинними похідними [1–3].

В даній статті розглянуто задачі на власні значення з розривними власними функціями еліптичного рівняння другого порядку, записаного в декартовій та циліндричній системах координат. Для дискретизації цих задач запропоновано обчислювальні схеми методу скінченних елементів (МСЕ), що базуються на використанні класів кусково-розривних функцій [4]. Асимптотична точність запропонованих обчислювальних схем не гірша за аналогічні, відомі для задач з гладкими власними функціями [5].

Розглянемо задачі на власні значення з розривними власними функціями.

Задача **I.** Нехай в обмеженій області Ω, що складається з двох областей

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega = \bigcup_{l=1}^{2} \Omega_l, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing, \quad \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \gamma, \quad \Gamma = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \setminus \gamma$$

($\overline{\Omega}_l$ — багатокутники з кусково-лінійними без самоперетинів межами $\partial\Omega_l$, $l = 1, 2$), визначено рівняння

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + qu = \lambda \rho u, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$u = 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Тут $x = (x_1, x_2)$, $k_{ij} = k_{ji} \in C(\overline{\Omega}_l) \cap C^1(\Omega_l)$, $|k'_{ij}| < \infty$; $\rho, q \in C(\Omega_l)$, $0 \le q \le$ $\le q_1 < \infty$, $0 < \rho_0 \le \rho \le \rho_1 < \infty$, $l = 1, 2$, $i, j = 1, 2$,

$$\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \ \ge\ \alpha_1 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \qquad \forall \xi_i, \xi_j \in R, \quad \alpha_1 > 0.$$

Умови спряження „неідеального" контакту мають вигляд

$$\left[\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n, x_i)\right] = 0, \qquad x \in \gamma, \tag{3}$$

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n, x_i)\right\}^{\pm} = R[u], \qquad x \in \gamma, \tag{4}$$

де $\{\varphi\}^{\pm} = \varphi^{\pm}$; $[\varphi] = \varphi^{+} - \varphi^{-}$ при $x \in \gamma$. Тут $\varphi^{-} = \varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega_1 \cap \gamma$, $\varphi^{+} =$ $= \varphi(x)$ при $x \in \partial\Omega_2 \cap \gamma$; n — нормаль до γ, що напрямлена в область Ω_2.

Задача **II.** Нехай у згаданій вище обмеженій області Ω, що складається з двох областей Ω_1, Ω_2, визначено рівняння

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 k_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = \lambda x_1 \rho u, \qquad x\in\Omega, \tag{5}$$

з крайовими умовами

$$u = 0, \qquad x\in\Gamma. \tag{6}$$

Умови спряження „неідеального" контакту на відрізку γ дотику областей Ω_1, Ω_2 мають вигляд

$$\left[\sum_{i=1}^{2} k_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\right] = 0, \qquad x\in\gamma, \tag{7}$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{2} k_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\right\}^{\pm} = R[u], \qquad x\in\gamma, \tag{8}$$

де $k_i\in C(\overline{\Omega}_l)\cap C^1(\Omega_l)$; $l=1,2$; $0<k^0\le k_i\le k^1<\infty$.

Зауваження. При розгляді задачі (5)–(8) вважаємо, що області $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ є такими, де виконується умова $\forall x\in\overline{\Omega}\Rightarrow x_1\ge\alpha>0$. В задачі (1)–(4) виконання цієї умови не вимагається.

Для задач I, II ((1)–(4); (5)–(8)) введемо в розгляд лінійні множини M^{ν} ($\nu=$ $=$ I, II) функцій $v(x)$, які неперервні, неперервно диференційовні на $\overline{\Omega}_l$, $l=1$, 2, мають неперервні обмежені другі частинні похідні на Ω_l і задовольняють відповідно умови (2)–(4) і (6)–(8). Множини M^{ν} — щільні в $L_2(\Omega)$ [6]. Тоді крайові задачі I, II полягають в тому, що необхідно знайти числа λ^{ν} і відмінні від нульових функції $u^{\nu}(x)\in M^{\nu}$, які задовольняють диференціальне рівняння (1) (задачі I), або рівняння (5) (задачі II).

Легко бачити, що власні функції $u^{\nu}(x)\in M^{\nu}$ задач I, II допускають розрив першого роду на відрізку γ дотику областей Ω_1, Ω_2. Диференціальні оператори L^{ν} (при $\nu=$ I визначаються лівою частиною рівняння (1), а при $\nu=$ II — лівою частиною рівняння (5)) — симетричні і додатно визначені на $M^{\nu}\subset L_2(\Omega)$ [4]. Тут

$$\begin{gathered}(L^{\mathrm{I}}u,v) = \iint_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+quv\right\}d\Omega + R\int_{\gamma}[u][v]\,d\gamma = \\ = (u,L^{\mathrm{I}}v) = \alpha^{\mathrm{I}}(u,v) \qquad \forall u,v\in M^{\mathrm{I}}, \\ (L^{\mathrm{I}}u,u) = \alpha^{\mathrm{I}}(u,u)\ge\alpha_1\iint_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \ge \alpha_1\mu_1\iint_{\Omega}u^2\,d\Omega; \\ (L^{\mathrm{II}}u,v) = \iint_{\Omega}x_1\sum_{i=1}^{2}k_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\Omega + R\int_{\gamma}x_1[u][v]\,d\gamma = \\ = (u,L^{\mathrm{II}}v) = \alpha^{\mathrm{II}}(u,v) \qquad \forall u,v\in M^{\mathrm{II}}, \\ (L^{\mathrm{II}}u,u) = \alpha^{\mathrm{II}}(u,u)\ge\alpha k^0\iint_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \ge \alpha k^0\mu_1\iint_{\Omega}u^2\,d\Omega,\end{gathered} \tag{9}$$

де $\mu_1>0$ — стала в узагальненій нерівності Фрідріхса [4, 6]:

$$\iint\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \geq \mu_1 \iint\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \qquad \forall u \in M^{\nu}, \quad \nu = \mathrm{I, II}.$$

На M^{ν} введемо в розгляд енергетичний скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle^{\nu}$ і енергетичну норму $\|\cdot\|_{L^{\nu}}$ таким чином:

$$\langle u, v\rangle^{\nu} = \alpha^{\nu}(u, v) \qquad \forall u, v \in M^{\nu},$$
$$\|u\|_{L^{\nu}} = \{\alpha^{\nu}(u, u)\}^{1/2} \qquad \forall u \in M^{\nu}, \quad \nu = \mathrm{I, II}. \tag{10}$$

Поповнюючи M^{ν} за енергетичною нормою $\|\cdot\|_{L^{\nu}}$, отримуємо енергетичний простір $H_{\nu} \subset L_2(\Omega)$ [6].

Дотримуючись [5, 6], для кожної з задач I, II отримуємо по дві еквівалентні узагальнені задачі на власні значення з власними функціями, що допускають розрив на γ.

Узагальнена задача I^{ν}. Найменше власне значення λ_1^{ν} задачі ν ((1)–(4) чи (5)–(8)) визначається як найменше значення функціонала Релея

$$R^{\nu}(v) = \frac{\|v\|^2_{L^{\nu}}}{b^{\nu}(v, v)} \qquad \forall v \in H_{\nu} \tag{11}$$

на підпросторі функцій $v(x) \in H_{\nu}$, що задовольняють умову нормування

$$b^{\nu}(v, v) = 1, \qquad v \in H_{\nu}, \quad \nu = \mathrm{I, II},$$

де

$$b^{\mathrm{I}}(v, v) = \iint\limits_{\Omega} \rho v^2 d\Omega, \qquad b^{\mathrm{II}}(v, v) = \iint\limits_{\Omega} x_1 \rho v^2 d\Omega,$$

$$\lambda_1^{\nu} = \frac{\|v_1^{\nu}\|_{L^{\nu}}}{b^{\nu}(v_1^{\nu}, v_1^{\nu})}, \qquad v_1^{\nu}(x) \in H_{\nu}.$$

Всі інші власні значення λ_m^{ν}, $m > 1$, задачі ν в порядку їх зростання визначаються як дійсні числа, які є найменшими значеннями функціонала Релея $R^{\nu}(v)$ (11) на підпросторах $H_m^{\nu} \subset H_{\nu}$ функцій $v(x)$, що задовольняють умови

$$b^{\nu}(v, v) = 1, \quad b^{\nu}(v, v_l^{\nu}) = 0, \qquad l = \overline{1, m-1}, \quad v_l^{\nu} \in H_{\nu},$$

де $v_l^{\nu}(x)$ — власна функція задачі ν, що відповідає власному значенню λ_l^{ν}.

Узагальнена задача II^{ν} полягає в тому, що необхідно знайти λ^{ν} і відмінні від нульових функції $u^{\nu}(x) \neq 0$, $u^{\nu} \in H_{\nu}$, такі, що для будь-якого $v(x) \in H_{\nu}$ виконується рівність

$$\langle u^{\nu}, v\rangle^{\nu} = \lambda^{\nu} b^{\nu}(u^{\nu}, v), \qquad u^{\nu} \in H_{\nu} \quad \forall v \in H_{\nu}, \quad \nu = \mathrm{I, II}. \tag{12}$$

Справедлива така лема.

Лема 1. *Власні функції* $v_n^{\nu}(x)$, $v_m^{\nu}(x) \in H_{\nu}$ *задач* I, II, *що допускають розрив на* γ, *ортогональні між собою в сенсі скалярних добутків* $\langle\cdot,\cdot\rangle^{\nu}$, $b^{\nu}(\cdot,\cdot)$ *при* $\lambda_n^{\nu} \neq \lambda_m^{\nu}$.

Доведення. Враховуючи співвідношення (12), маємо

$$\langle v_n^{\nu}, v_m^{\nu}\rangle^{\nu} = \lambda_n^{\nu} b^{\nu}(v_n^{\nu}, v_m^{\nu}), \qquad \langle v_m^{\nu}, v_n^{\nu}\rangle^{\nu} = \lambda_m^{\nu} b^{\nu}(v_m^{\nu}, v_n^{\nu}).$$

Отже,

$$0 = (\lambda_n^{\nu} - \lambda_m^{\nu}) b^{\nu}(v_n^{\nu}, v_m^{\nu}) \Rightarrow b^{\nu}(v_n^{\nu}, v_m^{\nu}) = 0.$$

Крім того,

$$\langle v_n^{\nu}, v_m^{\nu}\rangle^{\nu} = \lambda_n^{\nu} b^{\nu}(v_n^{\nu}, v_m^{\nu}) = 0.$$

Лему доведено.

Твердження. *Якщо власна функція $u_n^{\nu}(x) \in H^{\nu}$, що допускає розрив на γ, відповідної узагальненої задачі належить множині $C^1(\overline{\Omega}_l) \cap C^2(\Omega_l)$, $l = 1, 2$, то вона задовольняє умови спряження неідеального контакту* (*умови* (3), (4) — *в задачі* I, *чи* (7), (8) — *в задачі* II).

Доведення. Нехай $u_n^{\nu}(x)$ — власна функція, що допускає розрив на γ, яка відповідає власному значенню λ_n^{ν} задачі ν, а функція $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega_1)$ і $v(x) \equiv 0$ при $x \in \overline{\Omega}_2$. Тоді з (12) отримуємо

$$\iint\limits_{\Omega_1} \left\{ \Psi^{\nu} \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}^{\nu} \frac{\partial u_n^{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + q^{\nu}(x) u_n^{\nu} v \right\} d\Omega_1 = \lambda_n^{\nu} \iint\limits_{\Omega} \Psi^{\nu} \rho u_n^{\nu} v \, d\Omega_1, \tag{13}$$

де

$$\Psi^{\nu} = \begin{cases} 1, & \nu = \mathrm{I}, \quad q^{\mathrm{I}} = q(x), \quad q^{\mathrm{II}} = 0; \\ x_1, & \nu = \mathrm{II}, \quad k_{ij}^{\mathrm{I}} = k_{ij}, \quad k_{ii}^{\mathrm{II}} = k_i, \quad k_{ij}^{\mathrm{II}} = k_{ji}^{\mathrm{II}} = 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

З (13) випливає, що власна функція $u_n^{\nu}(x)$ в області Ω_1 задовольняє диференціальне рівняння

$$L^{\nu} u_n^{\nu}(x) = \lambda_n^{\nu} \Psi^{\nu} \rho u_n^{\nu}(x). \tag{14}$$

Нехай тепер $v(x) \equiv 0$ при $x \in \overline{\Omega}_1$ і $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega_2)$. Тоді з (12) випливає, що рівняння (14) справедливе в області Ω_2.

Нехай $v(x)$ є довільною функцією на $\partial\Omega_1 \cap \gamma$. Тоді з урахуванням (14) з (12) отримуємо

$$\int\limits_{\gamma} \left\{ \Psi^{\nu} \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}^{\nu} \frac{\partial u_n^{\nu}}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right\}^{-} v^{-} d\gamma + \int\limits_{\gamma} R \Psi^{\nu} [u_n^{\nu}] (0 - v^{-}) d\gamma = 0.$$

Отже,

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}^{\nu} \frac{\partial u_n^{\nu}}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right\}^{-} = R[u_n^{\nu}], \qquad x \in \gamma. \tag{15}$$

Аналогічно маємо

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}^{\nu} \frac{\partial u_n^{\nu}}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right\}^{+} = R[u_n^{\nu}], \qquad x \in \gamma. \tag{16}$$

Тим самим доведено справедливість твердження.

Наближені узагальнені розв'язки задач I, II на власні значення зручно знаходити за допомогою МСЕ. Для цього доцільно кожну з областей $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ розбити на скінченне число N_i, $i = 1, 2$, трикутників $\bar{e}_r^{\,i}$ ($r = \overline{1, N_i}$, $\overline{\Omega}_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} \bar{e}_j^{\,i}$, $\bar{e}_r^{\,i} \cap \bar{e}_l^{\,i} = \varnothing$, $r \neq l$; $r, l = \overline{1, N_i}$; $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$).

Введемо в розгляд простори $H_k^{\nu} \subset H_{\nu}$ функцій $v_k^N(x)$, які неперервні в кожній із областей $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$, є повними поліномами степеня k, $k = 1, 2, 3$, змінних x_1, x_2 в кожному з трикутників $\overline{e}_r^i$ розбиття області $\overline{\Omega}$ і набувають нульових значень в Γ. Тоді отримаємо алгебраїчну узагальнену задачу ν, $\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}$, на власні значення [5, 7]

$$A^{\nu}\omega^{\nu k} = \lambda^{\nu}B^{\nu}\omega^{\nu k}, \tag{17}$$

де

$$A^{\nu} = A^{\nu T} > 0, \quad B^{\nu} = B^{\nu T} > 0, \quad A^{\nu} = \left\{a_{ij}^{\nu}\right\}_{i,j=1}^{n_k}, \quad B^{\nu} = \left\{b_{ij}^{\nu}\right\}_{i,j=1}^{n_k},$$

$$a_{ij}^{\nu} = \iint\limits_{\Omega}\left\{\Psi^{\nu}\sum_{l,s=1}^{2}k_{ls}^{\nu}\frac{\partial\varphi_i^k}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_j^k}{\partial x_l} + q^{\nu}\varphi_i^k(x)\varphi_j^k(x)\right\}d\Omega + \int\limits_{\gamma}R\Psi^{\nu}\left[\varphi_i^k\right]\left[\varphi_j^k\right]d\gamma,$$

$$b_{ij}^{\nu} = \iint\limits_{\Omega}\Psi^{\nu}\rho\varphi_i^k(x)\varphi_j^k(x)d\Omega,$$

$\left\{\varphi_i^k\right\}_{i=1}^{n_k}$ — базис простору H_k^N [4], $\omega^{\nu k} = (\omega_1^{\nu k}; \omega_2^{\nu k}, \ldots, \omega_{n_k}^{\nu k})^T$ — невідомі параметри МСЕ (невідомі значення наближеної власної функції $u_k^{\nu N}(x)$ у вузлових точках області $\overline{\Omega}$, чи значення функції $u_k^{\nu N}(x)$ і відповідних перших її частинних похідних — у випадку використання ермітової інтерполяції). Тут

$$u_k^{\nu N}(x) = \sum_{i=1}^{n_k}\omega_i^{\nu k}\varphi_i^k(x) \in H_k^N. \tag{18}$$

Базисні функції $\varphi_i^k(x)$, як і функції $v_k^N(x) \in H_k^N$, допускають розрив першого роду на відрізку γ розмежування областей Ω_1, Ω_2.

На основі принципу мінімаксу [5] маємо

$$\lambda_l^{\nu} = \min_{S_l^{\nu} \subset H_{\nu}}\left\{\max_{u \in S_l^{\nu}} R^{\nu}(u)\right\}, \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

$$\lambda_l^{\nu N} = \min_{S_l^{\nu N} \subset H_k^N}\left\{\max_{v_k^N \in S_l^{\nu N}} R^{\nu}\left(v_k^N\right)\right\}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n_k.$$

Отже,

$$\lambda_i^{\nu} \leq \lambda_i^{\nu N}, \qquad i = \overline{1, n_k},$$

де S_l^{ν} — l-вимірний підпростір простору H_{ν}; $S_l^{\nu N}$ — l-вимірний підпростір відповідного простору H_k^N, $k = 1, 2, 3$.

Для отримання оцінок похибок наближених власних значень та відповідних наближених власних функцій доцільно ввести в розгляд оператор проектування Π лінійних множин M^{ν}, $\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}$, на простори H_k^N, $k = 1, 2, 3$, функцій МСЕ таким чином:

$$\alpha^{\nu}(u - \Pi u, v_k^N) = 0, \qquad u \in M^{\nu} \quad \forall v_k^N \in H_k^N. \tag{19}$$

Справедлива така лема.

Лема 2. *Для кожної функції* $u \in M^{\nu}$, $\nu = \mathrm{I}, \mathrm{II}$, *існує і притому єдиний елемент* $\Pi u \in H_k^N$, $k = 1, 2, 3$, *такий, що задовольняє співвідношення* (19). *Якщо* $u(x)$ *в кожній з областей* Ω_1, Ω_2 *має обмежені неперервні частинні похідні* $(k+1)$*-го порядку, то справедлива оцінка*

$$\|u - \Pi u\|_{W_2^1} \le \frac{c h^k}{f(\Theta)}, \tag{20}$$

де $c = \text{const} > 0$, h *— найбільша із довжин сторін трикутників* $\bar{e}_r^i$ *розбиття області* $\bar{\Omega}$; k *— степінь поліномів МСЕ; при* $k = 1$ $f(\Theta) = \cos\Theta$ (Θ *— половина величини найбільшого з кутів* $\bar{e}_r^i$); *при* $k = 2, 3$ $f(\Theta) = \sin\Theta$ (Θ *— величина найменшого з кутів* $\bar{e}_r^i$).

Доведення. Для кожної з функцій $u(x) \in M^{\nu}$ можемо знайти функцію

$$f^{\nu}(x) = L^{\nu} u, \qquad u \in M^{\nu},$$

і побудувати крайову задачу з розривним розв'язком $u(x)$ на γ таким чином:

$$L^{\nu} u = f^{\nu}(x), \qquad x \in \Omega, \quad u \in M^{\nu}, \quad f^{\nu} \in L_2(\Omega), \tag{21}$$

де крайова умова та умови спряження визначаються відповідно співвідношеннями (2)–(4) чи (6)–(8).

Дотримуючись [4], легко бачити, що вибрана функція $u(x) \in M^{\nu}$ при фіксованому f є єдиним розв'язком задачі (21) і єдиною екстремаллю функціонала енергії

$$F^{\nu}(v) = \alpha^{\nu}(v, v) - 2(f^{\nu}, v), \qquad v \in H_{\nu}, \tag{22}$$

на отриманому раніше енергетичному просторі H_{ν}.

Нехай $u(x)$ — розв'язок крайової задачі (21), а $u_k^N(x) \in H_k^N$ — її єдиний наближений узагальнений розв'язок. Тоді справедливі рівності

$$\alpha^{\nu}(u, v_k^N) = (f^{\nu}, v_k^N), \tag{23}$$

$$\alpha^{\nu}(u_k^N, v_k^N) = (f^{\nu}, v_k^N) \qquad \forall v_k^N \in H_k^N. \tag{24}$$

Віднімаючи (24) від (23), одержуємо

$$\alpha^{\nu}(u - u_k^N, v_k^N) = 0 \qquad \forall v_k^N \in H_k^N. \tag{25}$$

Отже, $\Pi u = u_k^N(x) \in H_k^N$.

Нехай в H_k^N існують два елементи $u_k^{\mathrm{I},N}$, $u_k^{\mathrm{II},N}$ такі, що

$$\alpha^{\nu}(u - u_k^{\mathrm{I},N}, v_k^N) = 0, \qquad \alpha^{\nu}(u - u_k^{\mathrm{II},N}, v_k^N) = 0.$$

Тоді, вибираючи $v_k^N = u_k^{\mathrm{I},N} - u_k^{\mathrm{II},N}$, отримуємо суперечність. Отже, існування і єдиність елемента $\Pi u \in H_k^N$ доведено.

Перейдемо до отримання оцінки (20). Нехай u — розривний класичний розв'язок крайової задачі (21). Покажемо, що для будь-якої $v(x) \in H_{\nu}$ справедлива рівність [4]

$$F^{\nu}(v) - F^{\nu}(u) = \|v - u\|_{L^{\nu}}^2, \qquad u \in M^{\nu}, \quad \forall v \in H_{\nu}. \tag{26}$$

Дійсно, оскільки

$$(f^{\nu}, v) = (L^{\nu} u, v) = \langle u, v \rangle^{\nu}, \qquad (f^{\nu}, u) = \langle u, u \rangle^{\nu},$$

то

$$F^{\nu}(v) - F^{\nu}(u) = \langle v, v \rangle^{\nu} - 2(f^{\nu}, v) - \langle u, u \rangle^{\nu} + 2(f^{\nu}, u) =$$

$$= \langle v, v \rangle^{\nu} - 2\langle u, v \rangle^{\nu} + \langle u, u \rangle^{\nu} = \|v - u\|_{L^{\nu}}^2.$$

Рівність (26) доведено.

Отже, маємо

$$F^{\nu}(u_k^N) - F^{\nu}(u) = \min_{v_k^N \in H_k^N} F^{\nu}(v_k^N) - F^{\nu}(u) \le F^{\nu}(\bar{u}_k^N) - F^{\nu}(u) = \|\bar{u}_k^N - u\|_{L^{\nu}}^2, \tag{27}$$

де $\bar{u}_k^N(x) \in H_k^N$ — така функція, що на кожному трикутнику $\bar{e}_r^i$ триангуляції області $\bar{\Omega}$ є повним інтерполяційним поліномом степеня k розв'язку $u(x)$.

Враховуючи оцінки інтерполяції [8, 9], умову еліптичності та нерівність Фрідріхса, з (27) одержуємо

$$\|u_k^N - u\|_{W_2^1}^2 \le c_1 \|u_k^N - u\|_{L^{\nu}}^2 \le c_1 \|\bar{u}_k^N - u\|_{L^{\nu}}^2 \le \frac{c^2 h^{2k}}{f^2(\Theta)}.$$

Тим самим встановлено справедливість леми 2.

Припустимо, що розглядувані задачі не мають кратних власних значень. Тоді на основі леми 2, слідуючи [5], легко показати справедливість такої теореми.

Теорема. *Нехай власні функції* $v_i^{\nu}(x)$ $i = \overline{1, n_k}$, *задачі* ν, *що допускають розрив на* γ, *— неперервні, неперервно диференційовні в кожній з областей* $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ *і мають неперервні обмежені в* Ω_1, Ω_2 *частинні похідні* $(k+1)$*-го порядку.*

Тоді справедливі оцінки

$$0 \le \lambda_l^{\nu N} - \lambda_l^{\nu} \le c h^{2k},$$
$$\|v_l^{\nu} - v_l^{\nu N}\|_{W_2^1} \le c_1 h^k, \qquad l = \overline{1, n_k}, \tag{28}$$

де k *— степінь поліномів МСЕ.*

Оцінки (28) свідчать про те, що запропоновані обчислювальні схеми для наближеного розв'язку задач на власні значення з розривними власними функціями за точністю асимптотично не гірші за аналогічні, відомі для задач на власні значення з гладкими власними функціями [5].

Запропоновані обчислювальні схеми тестовані на різних задачах на власні значення з розривними власними функціями [7]. Проведені обчислювальні експерименти свідчать про те, що зміна параметра R суттєво впливає на власні значення розглядуваної задачі з розривними власними функціями. Крім того, в загальному випадку пропорційна зміна параметра R не викликає пропорційної зміни власних значень λ_l^{ν}.

1. *Зарубин В. С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М. :Энергоатомиздат, 1983. – 326 с.
2. *Шлыков Ю. П., Ганин Е. А.* Контактный теплообмен. – М. ; Л. :Энергоатомиздат, 1987. – 265 с.
3. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1975. – 227 с.
4. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
5. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Мир, 1970. – 512 с.
7. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – Киев: Наук. думка, 1995. – 262 с.
8. *Zlamal M.* On the finite element method // Numer. Math. – 1968. – **12**, № 5. – P. 393–409.
9. *Zenisek A.* Convergence of a finite element procedure for solving boundary value problems of the systems of elliptic equations // Apl. math. – 1969. – **14**, № 5. – P. 39–45.

Одержано 02.07.97,
після доопрацювання – 19.01.98