УДК 517.5; 519.65

Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ n ПЕРЕМЕННЫХ

We propose a new approach to the solution of a problem of best approximation of functions of n variables by certain subspace. The functions considered are determined by restrictions on modulus of continuity of some partial derivatives. This approach is based on duality theorem and on the presentation of function as a countable sum of simple functions

Запропоновано новий підхід до розв'язання задачі про найкраще наближення деяким підпростором функцій n змінних, що задаються обмеженнями на модуль неперервності деяких частинних похідних. Цей підхід грунтується на теоремі двоїстості та на зображенні функції як зчисленної суми простих.

1. Введение и теорема двойственности. Мы не станем излагать теорию вопроса — это заняло бы много места; назовем лишь несколько фамилий ученых, чьи результаты по приближению в многомерном случае хорошо известны: С. М. Никольский, В. Н. Темляков, Я. С. Бугров, М. К. Потапов, В. Ф. Бабенко, Э. М. Галеев, Динь Зунг и др.

В настоящей статье предлагается некоторый новый подход, позволяющий в ряде случаев для периодических функций n переменных получить точные результаты при оценке наилучшего приближения подпространством. Исходной точкой является следующее утверждение, которое называют теоремой двойственности для наилучшего приближения [1] (см. также, например, [2, с. 113]).

Теорема А. *Пусть X — линейное нормированное пространство, X^* — пространство, сопряженное с X, F — подпространство в X. Для любого $x \in X\setminus F$*

$$E(x, F) := \inf_{u\in F} \|x-u\| = \sup\{f(x):\ f\in X^*,\ \|f\|\le 1,\ f(u)=0\ \ \forall\, u\in F\}. \quad (1)$$

Пусть в теореме А X есть пространство $L_{n,p}$, $1\le p\le\infty$, 2π-периодических по каждой переменной функций $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с обычной нормой:

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_{n,p}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(\bar{x})|^p d\bar{x}\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty; \\ \sup\limits_{\bar{x}}\operatorname{vrai} |f(\bar{x})|, & p=\infty. \end{cases}$$

Учитывая общий вид линейного функционала в пространстве $L_{n,p}$, $p\ge 1$ (см., например, [3, с. 196]), а также предложение 1.4.2 из [4, с. 26], которое, очевидно, справедливо и в n-мерном случае, утверждение теоремы А, т. е. соотношение (1), можно записать для $\bar{x}(t) \in L_{n,p}\setminus F$ следующим образом:

$$E(x, F)_p = \sup\left\{\int\limits_0^{2\pi} x(\bar{t})h(\bar{t})d\bar{t}:\ h\in L_{n,p'},\ \|h\|_{p'}\le 1,\ \int\limits_0^{2\pi} u(\bar{t})h(\bar{t})d\bar{t} = 0\ \ \forall u(\bar{t})\in F\right\}, \quad (2)$$

$$1\le p<\infty,\ \ 1/p + 1/p' = 1.$$

Заметим, что при $p=\infty$ равенство (2) справедливо, по крайней мере, для конечномерных подпространств F [1, 4, с. 26].

2. Модуль непрерывности. В одномерном случае модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ функции $f(t)\in C[a, b]$ определяется соотношением

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(t') - f(t'')|:\ t', t''\in[a, b],\ |t'-t''|\le\delta\},$$

которое, если функция $f(t)$ абсолютно непрерывна, можно записать так:

$$\omega(f,\delta) = \sup\left\{\left|\int_{t'}^{t''} f'(t)dt\right| : t', t'' \in [a,b],\ |t'-t''| \le \delta\right\}. \tag{3}$$

Условие (3), определяющее модуль непрерывности, можно перенести на случай функции $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n переменных.

Зададим в R^n некоторое расстояние $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ между точками $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Этим расстоянием в R^n определяется единичный шар B_ρ с центром в нуле:

$$B_\rho = \{\bar{x} : \bar{x} \in R^n,\ \rho(\bar{x}, \bar{0}) \le 1\}.$$

Через $B_\rho(\bar{\alpha}, r)$ будем обозначать задаваемый расстоянием ρ шар с центром в точке $\bar{\alpha} \in R^n$ и радиусом r:

$$B_\rho(\bar{\alpha}, r) = \{\bar{x} : \bar{x} \in R^n,\ \rho(\bar{\alpha}, \bar{x}) \le r\}.$$

Если $\bar{\alpha} = \bar{0}$, то вместо $B_\rho(\bar{0}, r)$ будем писать $B_\rho(r)$.

Назовем модулем непрерывности, соответствующим функции $f(\bar{x})$, суммируемой в ограниченной замкнутой области $\bar{Q} \subset R^n$, величину

$$\omega_\rho(f,\delta) = \sup\left\{\left|\int\limits_{B_\rho(\bar{\alpha},r)\cap\bar{Q}} f(\bar{x})\,d\bar{x}\right| : \bar{\alpha} \in \bar{Q},\ \operatorname{mes} B_\rho(\bar{\alpha}, r) \le \delta\right\}, \tag{4}$$

где верхняя грань модуля интеграла вычисляется по всем шарам $B_\rho(\bar{\alpha}, r)$ с центром в точке $\bar{\alpha} \in \bar{Q}$, мера которых не превышает δ.

При фиксированном расстоянии ρ модуль непрерывности $\omega_\rho(f,\delta)$ для любой функции $f(\bar{x}) \in \bar{Q} \subset R^n$ имеет такие свойства: 1) $\omega_\rho(f, 0) = 0$, 2) функция $\omega_\rho(f,\delta)$ непрерывна и не убывает для $0 \le \delta \le \operatorname{mes}\bar{Q}$, 3) $\omega_\rho(f,\delta)$ — полуаддитивная функция на том же множестве. Задав функцию $\omega(\delta)$ с такими свойствами, а также расстояние ρ в R^n, мы определим класс H_ρ^ω суммируемых на множестве $\bar{Q}$ функций $f(\bar{x})$ таких, что

$$\omega_\rho(f,\delta) \le \omega(\delta), \qquad \delta \in [0, \operatorname{mes}\bar{Q}].$$

3. Простые функции и основная лемма. При оценке наилучшего приближения функций одной переменной на классе H^ω, задаваемом выпуклым вверх модулем непрерывности $\omega(\delta)$, ключевую роль играет утверждение [5, с. 190], смысл которого заключен в равенстве

$$\sup\left\{\left|\int_\alpha^\beta \psi(t)f(t)dt\right| : f \in H^\omega[\alpha,\beta]\right\} = \int_0^{\beta-\alpha} r(\Psi, t)\omega'(t)dt, \tag{5}$$

где $\Psi(t)$ — простая функция [5, с. 132], $\Psi'(t) = \psi(t)$, а $r(\Psi, t)$ — убывающая перестановка функции $\Psi(t)$.

В n-мерном случае назовем функцию $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ простой, если выполнены следующие условия:

1) $\varphi(\bar{x})$ абсолютно непрерывна в R^n;

2) $\varphi(\bar{x}) > 0$ для $\bar{x} \in Q$, где Q — ограниченная область, т. е. непустое ограниченное открытое связное множество в R^n;

3) $\varphi(\bar{x}) = 0$ для $\bar{x} \in R^n \setminus Q$;

4) если $A = \max\limits_{\bar{x}} \varphi(\bar{x})$, то для любого y, $0 \le y < A$, множество

$$M(y) = \{\, \bar{x} : \bar{x} \in Q,\ \varphi(\bar{x}) \ge y \} \tag{6}$$

есть область, а множество

$$M(A) = \{\, \bar{x} : \bar{x} \in Q,\ \varphi(\bar{x}) \ge A \}$$

областью не является.

Заметим, что характеристическим свойством простой функции $\varphi(\bar{x})$ является связность множества (6) для всех $y \in [0, A)$ в том смысле, что любые две точки множества $M(y)$ можно соединить непрерывной кривой, лежащей в $M(y)$. Множество Q будем называть основанием простой функции $\varphi(\bar{x})$. Простой функцией будем называть также отрицательную функцию $-\varphi(\bar{x})$, если $\varphi(\bar{x})$ — простая функция. Простая функция $\varphi(\bar{x})$ с основанием Q однозначно определяется множествами уровня $M(y)$ (6), где $0 \le y < A$.

Пусть расстоянием $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ в пространстве R^n задан единичный шар B_ρ. Простой функции $\varphi(\bar{x})$ с основанием Q поставим в соответствие простую, но симметрично убывающую функцию $\varphi^*(\rho, \bar{x})$ с основанием $B_\rho(r)$, радиус которого r выбран из условия $\operatorname{mes} B_\rho(r) = \operatorname{mes} Q$. Функция $\varphi^*(\rho, \bar{x})$ с основанием $B_\rho(r)$ однозначно определена множествами уровня:

$$M_\rho(y) = \{\, \bar{x} : \bar{x} \in B_\rho(r_y),\ \varphi^*(\rho, \bar{x}) \ge y \},$$

где радиус r_y выбирается из условия

$$\operatorname{mes} M_\rho(y) = \operatorname{mes} M(y), \qquad 0 \le y \le A.$$

Если $\operatorname{mes} M(A) = 0$, то множество $M_\rho(A)$ состоит из одной точки. В случае $\operatorname{mes} M(A) > 0$ выполняются равенства

$$\operatorname{mes} M_\rho(A) = \operatorname{mes} B_\rho(r_A) = \operatorname{mes} M(A).$$

Пусть заданы расстояние $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ и модуль непрерывности $\omega(\delta)$. Классу $H_\rho^\omega(\overline{Q})$ определенных на множестве $\overline{Q}$ функций сопоставим экстремальную симметрично убывающую функцию $f_\rho^*(\bar{x})$ такую, что $\omega_\rho(f_\rho^*, \delta) = \omega(\delta)$ при всех $0 \le \delta \le \operatorname{mes} \overline{Q}$. Действительно, на каждом уровне $y > 0$ мы выбираем шар $B_\rho(r_y)$ с центром в нуле и радиуса r_y так, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{mes} B_\rho(r_y) = \delta, \tag{7}$$

а для функции f_ρ^* — равенство

$$\left| \int\limits_{B_\rho(r_y)} f_\rho^*(\bar{x}) d\bar{x} \right| = \omega(\delta). \tag{8}$$

Соотношениями (7) и (8) функция $f_\rho^*(\bar{x})$ определена однозначно.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(\bar{x})$ — простая функция с основанием Q и $H_\rho^\omega(\overline{Q})$ — класс суммируемых на $\overline{Q}$ функций $f(\bar{x})$ n переменных, задаваемый в области Q условием*

$$\omega_\rho(f, \delta) \le \omega(\delta), \qquad 0 \le \delta \le \operatorname{mes} Q,$$

и расстоянием ρ. Тогда для любой функции $f \in H_\rho^\omega(\overline{Q})$ справедливо неравенство

$$\left| \int_Q f(\bar{x})\varphi(\bar{x})d\bar{x} \right| \le \int_{B_\rho(r)} f_\rho^*(\bar{x})\varphi^*(\bar{x})d\bar{x}, \tag{9}$$

где $\operatorname{mes} B_\rho(r) = \operatorname{mes} Q$, $\varphi^*(\bar{x})$ *— симметрично убывающая перестановка функции* $\varphi(\bar{x})$, $f_\rho^*(\bar{x})$ *— экстремальная симметрично убывающая перестановка в классе* $H_\rho^\omega(B_\rho(r))$.

Оценка (9) точна в том смысле, что существует простая функция $\varphi(\bar{x})$ с основанием Q, для которой в (9) будет знак равенства.

Доказательство сводится к применению теоремы о симметрично убывающих перестановках. В одномерном случае эта теорема доказана в [6, с. 334], общий случай см., например, в [7].

Считаем функции $f(\bar{x})$ и $\varphi(\bar{x})$ положительными на Q. Тогда

$$\int_Q f(\bar{x})\varphi(\bar{x})d\bar{x} \le \int_{B_\rho(r)} f^*(\bar{x})\varphi^*(\bar{x})d\bar{x}, \qquad \operatorname{mes} B_\rho(r) = \operatorname{mes} Q,$$

где $f^*(\bar{x})$ и $\varphi^*(\bar{x})$ — симметрично убывающие перестановки функций $f(\bar{x})$ и $\varphi(\bar{x})$. Из того, что $f \in H_\rho^\omega(\overline{Q})$, и из определения функции $f_\rho^*(\bar{x})$ следует, что для всех $\bar{x} \in B_\rho(r)$ выполняется неравенство $f^*(\bar{x}) \le f_\rho^*(\bar{x})$. Поэтому

$$\int_{B_\rho(r)} f^*(\bar{x})\varphi^*(\bar{x})d\bar{x} \le \int_{B_\rho(r)} f_\rho^*(\bar{x})\varphi^*(\bar{x})d\bar{x},$$

что и требовалось доказать.

Точность неравенства (9) следует из того факта, что $\varphi^*(\bar{x})$ — тоже простая функция с основанием $B_\rho(r)$, $\operatorname{mes} B_\rho(r) = \operatorname{mes} Q$.

Заметим, что утверждение леммы 1 в качественном отношении слабее одномерной леммы 7.4.1 из [5, с. 190], где соотношение (5) является точным для каждой конкретной простой функции $\Psi(t)$, если $\omega(\delta)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Лемма же 1 дает оценку, точную на множестве всех простых функций, имеющих одну и ту же симметрично убывающую перестановку.

4. Разложение функции n переменных на счетную сумму простых. Общий план рассуждений аналогичен соответствующей процедуре при разложении функции одной переменной [8, 4]. Основная трудность, которая возникает в n-мерном случае, связана с возможной сложностью строения множества $m(y) = \{ \bar{x} : f(\bar{x}) = y \}$ даже для абсолютно непрерывной функции $f(\bar{x})$, $\bar{x} = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$.

Пусть $f(\bar{x})$ определена и абсолютно непрерывна в замыкании $\overline{Q}$ области Q, сохраняет знак внутри Q и обращается в нуль на границе. Будем для определенности полагать, что $f(\bar{x}) > 0$ для $\bar{x} \in Q$. Для любого $y > 0$ введем в рассмотрение множество

$$m(y, Q) = \{ \bar{x} : \bar{x} \in Q,\ f(\bar{x}) = y \}. \tag{10}$$

Ясно, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ множество $m(\varepsilon, Q)$ есть связное множество.

Точку $y_1 > 0$ назовем точкой ветвления функции $f(\bar{x})$, если для $y \in (0, y_1)$ множество (10) является связным, а для $y \ge y_1$ множество (10) связным не является. Если при этом $\operatorname{mes} m(y_1, Q) = 0$, то $f(\bar{x})$ является простой функцией с основанием Q. Если же $\operatorname{mes} m(y_1, Q) > 0$, то множество $m(y_1, Q)$ содержит основания, по крайней мере, двух простых функций и т.д.

Обозначим через P множество всех точек ветвления функции $f(\bar{x})$.

Условие В. *Множество P точек ветвления абсолютно непрерывной на замыкании $\overline{Q}$ области Q функции $f(\bar{x})$ не более чем счетно.*

Из условия В следует, что если $f(\bar{x}) > 0$ в области Q и $A = \max\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in Q\}$, то множество $[0, A]\backslash f(P)$ открыто и может быть представлено в виде конечной или счетной суммы непересекающихся интервалов:

$$[0, A]\backslash f(P) = \bigcup_k (a_k, b_k),$$

а так как $\operatorname{mes} f(P) = 0$, то

$$\sum_k (b_k - a_k) = A.$$

Сопоставим каждому интервалу (a_k, b_k) функцию

$$f_k(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) - a_k, & a_k \le f(\bar{x}) < b_k; \\ b_k - a_k, & f(\bar{x}) \ge b_k; \\ 0, & f(\bar{x}) < a_k. \end{cases}$$

Если $a_k < y < b_k$, то множество $m(y, Q)$ состоит из не более чем счетного числа непересекающихся областей, так что

$$f_k(\bar{x}) = \sum_i \varphi_{k,i}(\bar{x}), \tag{11}$$

где $\varphi_{k,i}(\bar{x})$ — простые функции. Суммируя функции (11) по k, получаем разложение $f(\bar{x})$ на конечную или счетную сумму простых функций $\varphi_m(\bar{x})$ с основаниями $Q_m \subset Q$:

$$f(\bar{x}) = \sum_{k,i} \varphi_{k,i}(\bar{x}) = \sum_m \varphi_m(\bar{x}). \tag{12}$$

Равенство (12) выполняется почти всюду в области Q.

5. Классы 2π-периодических функций n переменных. В дальнейшем будем рассматривать функции $f(\bar{x})$ n переменных: $\bar{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в пространстве $L_{n,1}$ 2π-периодических локально суммируемых функций. Класс H_ρ^ω задается на кубе $[0, 2\pi]^n$ расстоянием $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ и модулем непрерывности $\omega(\delta)$:

$$\omega_\rho(f, \delta) \le \omega(\delta), \qquad 0 \le \delta \le \operatorname{mes}[0, \pi]^n.$$

Пусть $\mathcal{B}_r(t)$ — одномерная функция Бернулли [4, с. 107], т.е.

$$\mathcal{B}_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi r/2)}{k^r}, \qquad r = 1, 2, \ldots.$$

Если $\varphi(\bar{x}) \in L_{n,1}$ и

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\,dx_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то будем говорить, что функция

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\pi^n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}}_{n}\prod_{k=1}^{n}\mathcal{B}_{r_k}(x_k - t_k)\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)dt_1dt_2\ldots dt_n \tag{13}$$

есть периодический интеграл порядка r_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, по переменной t_k от функции $\varphi(\bar{x})$ с нулевым средним значением на периоде по каждой переменной. Действительно, дифференцируя r_k раз по x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$\frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial^{r_1}x_1\ldots\partial^{r_n}x_n} = \frac{1}{\pi^n}\underbrace{\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}}_{n}\prod_{k=1}^{n}\mathcal{B}_0(x_k - t_k)\varphi(t_1, \ldots, t_n)dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(\bar{x}).$$

Если $\varphi(\bar{t}) \in H_\rho^\omega$, то класс функций (13) будем обозначать $W^{r_1,\ldots,r_n}H_\rho^\omega$.

6. Оценка наилучшего приближения. Заметим сразу, что в идейном плане рассуждения не отличаются от случая $n = 2$, и, чтобы избежать громоздких выражений, будем приводить выкладки именно для двумерного случая.

Через $W^{r,s}H_\rho^\omega$ обозначим класс функций $f(x, y)$, 2π-периодических по каждой переменной, представимых в виде

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{B}_r(x - t)\mathcal{B}_s(y - \tau)\varphi(t, \tau)dtd\tau, \qquad r, s = 1, 2, \ldots,$$

где $\varphi(t, \tau) \in H_\rho^\omega$.

Теперь вернемся к соотношению двойственности (2) и пусть $f(x, y) \in W^{r,s}H_\rho^\omega$. Тогда для любого конечномерного подпространства $F \subset L_{2,1}$

$$E(f, F)_p = \sup\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)g(x, y)dxdy \colon g \in L_{2,p'}, \ \|g\|_{p'} \le 1, \ g \perp F^\perp\right\},$$

где $1/p + 1/p' = 1$, $1 \le p \le \infty$, а $g \in F^\perp$ означает, что

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x, y)g(x, y)dxdy = 0 \qquad \forall\psi(x, y) \in F.$$

Проинтегрировав по частям r раз по переменной x при фиксированном y, а затем s раз по переменной y при фиксированном x, получим равенство

$$E(f, F)_p = \sup\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial^r x\partial^s y} g_{r,s}(x, y)dxdy \colon g_{r,s} \in W_{p'}^{r,s}F^\perp\right\},$$

где $W_{p'}^{r,s}F^\perp$ есть класс функций, представимых в виде

$$g_{r,s}(x, y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{B}_r(x - t)\mathcal{B}_s(y - \tau)g(t, \tau)dtd\tau, \qquad \|g\|_{p'} \le 1, \qquad g \in F^\perp.$$

Таким образом,

$$E(W^{r,s}H_\rho^\omega, F)_p := \sup_{f \in W^{r,s}H_\rho^\omega} E(f, F)_p =$$

$$= \sup_{\psi \in W_{p'}^{r,s}F^\perp}\ \sup_{f \in H_\rho^\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\psi(x, y)dxdy, \tag{14}$$

и все сводится к оценке функционала

$$\Phi_\rho^\omega(\psi) = \sup_{f \in H_\rho^\omega} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\psi(x, y)dxdy \tag{15}$$

на множестве функций двух переменных $\psi(x, y) \in W_p^{r,s}F^\perp$.

Будем считать, что условие В для функции $\psi(x, y)$ выполняется, и $\psi(x, y)$ разлагается на периоде на счетную сумму простых функций:

$$\psi(x, y) = \sum_k \varphi_k(x, y) \tag{16}$$

с основаниями Q_k. Так как функции $f(x, y)$ и $\psi(x, y)$ 2π-периодичны и в среднем равны нулю по каждому аргументу x и y, то интеграл в (15) мы можем вычислять не обязательно по квадрату $[0, 2\pi]^2$, а по любому множеству

$$K = [x_y \le x \le x_y + 2\pi,\ y_x \le y \le y_x + 2\pi],$$

на границах которого $\psi(x, y)$ обращается в нуль.

Каждой простой функции $\varphi_k(x, y)$ из разложения (16) с основанием $Q_k \in K$ поставим в соответствие ее симметрично убывающую перестановку $\varphi_k^*(x, y)$ с основанием $B_\rho(r_k)$, $\operatorname{mes} B_\rho(r_k) = \operatorname{mes} Q_k$, и положим

$$\Psi^*(\psi; x, y) = \sum_k \varphi_k^*(x, y), \qquad (x, y) \in B_\rho(r), \tag{17}$$

где $r = \max_k r_k$. Функцию (17) будем называть симметрично убывающей Σ-перестановкой функции $\psi(x, y)$, заданной в (16).

Теорема. *Если* $\psi \in W_p^{r,s}F^\perp$ *и допускает разложение* (16) *на простые функции* $\varphi_k(x, y)$ *с основаниями* Q_k, *полностью заполняющими множество* $K = [x_y, x_y + 2\pi;\ y_x, y_x + 2\pi]$, *то каково бы ни было расстояние* $\rho(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x}, \bar{y} \in R^2$, *и каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности* $\omega(\delta)$, *справедлива оценка*

$$\Phi_\rho^\omega(\psi) \le \iint_{B_\rho(r)} \Psi^*(\psi; x, y) f_\rho^*(x, y)dxdy, \tag{18}$$

где $f_\rho^*(x, y)$ *— экстремальная симметрично убывающая перестановка в классе* H_ρ^ω, *заданном на шаре* $B_\rho(r)$.

Доказательство. Учитывая (16), можем написать

$$\iint_K f(x, y)\psi(x, y)dxdy = \iint_K f(x, y)\sum_k \varphi_k(x, y)dxdy =$$

$$= \sum_k \iint_K f(x, y)\varphi_k(x, y)dxdy = \sum_k \iint_{Q_k} f(x, y)\varphi_k(x, y)dxdy.$$

Используя в каждой области Q_k лемму 1, получаем

$$\iint_K f(x, y)\psi(x, y)dxdy \le \sum_k \iint_{B_\rho(r)} f_\rho^*(x, y)\varphi_k^*(x, y)dxdy =$$

$$= \iint_{B_\rho(r)} f_\rho^*(x, y)\sum_k \varphi_k^*(x, y)dxdy = \iint_{B_\rho(r)} f_\rho^*(x, y)\Psi^*(\psi; x, y)dxdy$$

Оценка (18) справедлива для любой функции $\psi(x, y) \in W_p^{r,s}F^{\perp}$ и, конечно, зависит от подпространства F. Для конкретного подпространства F эта оценка может быть также более конкретной с учетом свойств класса $W_p^{r,s}F^{\perp}$. Особое значение имеют случаи, когда F есть подпространство тригонометрических полиномов заданной степени и подпространство полиномиальных сплайнов двух переменных минимального дефекта. Эти случаи будут рассмотрены в отдельной статье.

1. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими многочленами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, №3. – С.207–256.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М. : Наука, 1984. – 352 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М. : Наука, 1987. – 424 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи в теории приближения. – М. : Наука, 1976. – 320 с.
6. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. – М. : Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
7. *Коляда В. И.* Перестановки функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, вып. 5. – С. 61–95.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, №1. – С.93–124.

Получено 25.05.99