УДК 531.36

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ФУНКЦІЮ ДІЇ ЗА ГАМІЛЬТОНОМ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНИХ СИСТЕМ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ СТІЙКОСТІ

For nonholonomic systems, we introduce a notion of a function of Hamiltonian action. By using this function, we study the stability of nonholonomic systems in the case where equilibrium under consideration is a critical point of the corresponding Lagrangian (of the Whittaker system).

Для неголономних систем вводиться поняття функції дії за Гамільтоном, з допомогою якої досліджується стійкість неголономних систем у випадку, коли положення рівноваги, що розглядається, є критичною точкою відповідного лагранжіана (системи Уіттекера).

Як відомо [1], положення рівноваги неголономних систем, на відміну від голономних, не обов'язково збігаються з критичними точками відповідного лагранжіана, що може бути джерелом додаткових труднощів при дослідженні стійкості системи, особливо, коли питання не розв'язується в рамках лінійного наближення. Стійкість положень рівноваги неголономних систем, які є критичними точками лагранжіана, досліджував Уіттекер [2]. Цей більш вузький клас неголономних систем, який в подальшому називатимемо системами Уіттекера, перш за все цікавий тим, що за своїми властивостями він досить схожий на голономні системи. Більше того, в певному сенсі системи Уіттекера можна розглядати як різновид збурених голономних систем, маючи на увазі можливість застосування до них методів дослідження стійкості голономних систем [3–6]. Виявляється також, що для даних систем, за аналогією з голономними, конструктивним є розгляд функції дії за Гамільтоном S. Зокрема, в межах підходу [7], що грунтується на використанні функції дії для дослідження стійкості голономних систем, для систем Уіттекера вдається отримати умови нестійкості рівноваги.

1. Розглянемо неголономну систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = B^T(q)\lambda, \qquad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)^T, \tag{1}$$

$$B(q)\frac{dq}{dt} = 0, \tag{2}$$

де $B(q) = (b_{ij}(q))$ — матриця розмірності $l \times n$, $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, n$, $l < n$; λ — множники в'язей, $L(q, \dot q)$, $B(q) \in C^2(D_q \times R_{\dot q}^n)$, а лагранжіан L визначається виразом

$$L(q, \dot q) = T(q, \dot q) - \Pi(q) = \frac{1}{2}\dot q^T A(q)\dot q - \Pi(q). \tag{3}$$

Тут функції T і Π — відповідно кінетична і потенціальна енергії системи. Вважатимемо, що квадратична форма $T(0, \dot q)$ додатно визначена, $\Pi(0) = 0$; $\partial\Pi/\partial q(0) = 0$ і точка $q = \dot q = 0$ тим самим є станом рівноваги системи (1)–(3).

Неінтегровні співвідношення (2), які обмежують узагальнені швидкості системи ($\operatorname{rank} B(q) = l$), є неголономними в'язями.

Як і у випадку голономних систем, для системи (1)–(3) має місце інтеграл енергії

$$T(q, \dot q) + \Pi(q) = h = \text{const}. \tag{4}$$

Відомо [8, 9], що рівняння руху неголономної системи можуть бути отримані на підставі принципу Гамільтона у формі Гельдера

$$\int_0^{t_1} \delta L(q,\dot q)\,d\tau = 0. \tag{5}$$

На відміну від голономних систем, принцип Гамільтона у формі (5) вже не є принципом стаціонарної дії, коли справедлива рівність

$$\delta \int_0^{t_1} L(q,\dot q)\,d\tau = 0. \tag{6}$$

Герц [10], мабуть, першим вказав на те, що принцип Гамільтона у формі (6) для неголономних систем вже не є справедливим. Однак важливим є факт, що і для випадку неголономних систем лагранжіан $L(q,\dot q)$ залишається ключовою характеристикою системи.

Виходячи з даного факту, розглянемо функцію

$$S = \int_0^{t} L(q,\dot q)\,d\tau, \tag{7}$$

де величини

$$\begin{aligned} &q = q(t, q_0, \dot q_0), \quad \dot q = \dot q(t, q_0, \dot q_0), \\ &q_0 = q(t=0), \quad \dot q_0 = \dot q(t=0), \end{aligned} \tag{8}$$

які входять у підінтегральний вираз рівності (7), є загальним розв'язком рівнянь (1), (2). Аналогічно випадку голономних систем, назвемо функцію S функцією дії за Гамільтоном.

Припустимо, що розв'язок (8) є продовжуваним на всю вісь $t \in R$ і, отже, відповідає визначенню потоку [11]. Ця обставина не обмежує загальності розгляду, оскільки нижче мова йтиме про нестійкість рівноваги. Замінивши попередньо в (8) t на τ і здійснивши в рівності (7) інтегрування, отримаємо

$$S = \tilde S(\tau, q_0, \dot q_0)\Big|_0^t \in C^{(1,1,1)}_{tq_0\dot q_0}(R \times s_\delta), \tag{9}$$

де вектор $(q_0, \dot q_0)$ належить околу $s_\delta = \left\{(q_0,\dot q_0) \in D_q \times R^n_{\dot q}, \|q_0 \oplus \dot q_0\| < \delta\right\}$ точки $q = \dot q = \mathbf{0}$. Враховуючи, що співвідношеннями (8) визначається потік і, таким чином,

$$q_0 = q(-t, q, \dot q) \qquad \dot q_0 = \dot q(-t, q, \dot q), \tag{10}$$

на підставі (9) маємо

$$S = S^*(\tau, q(\tau), \dot q(\tau))\Big|_0^t \in C^{(1,1,1)}_{tq\dot q}\left(R \times D_q \times R^n_{\dot q}\right). \tag{11}$$

В подальшому зобразимо систему (1) – (3) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot q &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot p &= -\frac{\partial H}{\partial q} + B^T(q)\lambda, \\ B(q)\frac{\partial H}{\partial p} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{12}$$

де

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^T A(q)^{-1} p + \Pi(q) = h = \text{const}. \tag{13}$$

Розглянемо в R^n множину π, що визначається рівняннями

$$B(q)q = 0. \tag{14}$$

Оскільки $\operatorname{rank} B(q) = l$, то рівняння (14) завжди можна розв'язати відносно яких-небудь l компонент вектора узагальнених координат q. Позначимо обмеження довільної функції $\Psi(q)$ на π через $\hat{\Psi}(q)$. Поряд з множиною π визначимо також множини

$$\Omega = \{(q,p) \in s_\varepsilon : H = h = 0\},$$

$$\Omega^- = \{(q,p) \in s_\varepsilon : H = h < 0\},$$

$$\Omega^+ = \{(q,p) \in s_\varepsilon : H = h > 0\},$$

$$\Omega_1^- = \{(q,p) \in s_\varepsilon : H = h < 0, H - q\frac{\partial H}{\partial q} + (B(q)q)\lambda > 0\},$$

$$\Omega_1^+ = \{(q,p) \in s_\varepsilon : H = h > 0, H - q\frac{\partial H}{\partial q} + (B(q)q)\lambda > 0\}.$$

Теорема 1. *Припустимо, що існує таке число* $\varepsilon > 0$ ($D_q \supset \overline{s_\varepsilon^*} = \{q \in R^n, \|q\| \le \varepsilon\}$), *при якому виконуються умови:*

1) $\omega^* = \left\{q \in s_\varepsilon^* : \hat{\Pi}(q) < 0\right\} \ne \varnothing$;

2) $-\dfrac{\partial \Pi(q)}{\partial q} + B^T(q)\lambda \ne 0 \ \ \forall q \in \omega = \left\{q \in s_\varepsilon^* : \Pi(q) < 0\right\}$, $0 \in \partial\omega$.

Тоді положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ *системи* (1)–(3) *нестійке.*

Спочатку доведемо таку лему.

Лема. *При виконанні умов теореми* 1 $\Omega_1^- \ne \varnothing$.

Доведення. Спершу покажемо, що непорожньою є множина

$$\Omega^0 = \{(q,p) \in s_\varepsilon : H = 0, -q\frac{\partial H}{\partial q} > 0, B(q)q = 0\}.$$

На підставі теореми про середнє [12, с.301] маємо

$$H(q,p) - H(q_0, 0) = 0 = (q - q_0)\frac{\partial H}{\partial q}(q_0 + \theta(q - q_0), \theta p) +$$
$$+ p\frac{\partial H}{\partial p}(q_0 + \theta(q - q_0), \theta p), \quad \theta \in \,]0, 1[, \tag{15}$$

де $q_0 \in \partial\omega^*$, $q \in \omega^*$, $(q,p) \in \Omega$.

Виберемо точки $q_0 \in \partial\omega^*$, $q \in \omega^*$ $(q_0, q \in \Omega)$ на промені, що виходить з точки $q = 0$, так що вектор $(q - q_0) \subset \omega^*$. Зокрема, якщо радіус-вектор q при стягуванні його в точку $q = 0$ не виходить за межі ω^*, то зручно вибрати $q_0 = 0$. Такий вибір точок q_0 і q забезпечує колінеарність векторів q і $q - q_0$.

Враховуючи рівність

$$L = p\dot{q} - H = \frac{1}{2}p^T A^{-1} p - \Pi = p\frac{\partial H}{\partial p} \ \ \forall (q,p) \in \Omega, q \in \omega^*,$$

робимо висновок, що доданок $(q - q_0)\partial H/\partial q$ в правій частині (15) від'ємний. А оскільки вектори $q - q_0$ і $q_0 + \theta(q - q_0)$ колінеарні, то на підставі (15), беручи до уваги визначення ω^*, переконуємося в тому, що $\Omega^0 \ne \varnothing$.

Зафіксуємо тепер точку $(q^0, p^0) \in \Omega^0$. Оскільки Ω є межею для множини Ω^-, здійснимо мале збурення точки (q^0, p^0):

$$\|(q^* - q^0) \oplus (p^* - p^0)\| < \eta, \quad \eta = \text{const},$$

таке, що точка (q^*, p^*) вже є елементом множини Ω^-. Тоді внаслідок неперервності добутку $q\,\partial H/\partial q$ і виконання рівності (14) $\forall (q, p) \in \Omega^0$ число η (а отже, і відповідне збурення) можна вибрати настільки малим, щоб виконувались нерівності

$$H(q^*, p^*) - q\frac{\partial H}{\partial q}\bigg|_{q=q^*,\, p=p^*} + (B(q^*)q^*)\lambda > 0, \; H(q^*, p^*) < 0.$$

Звідси робимо висновок про справедливість леми.

Наслідок. *В умовах леми* $\Omega_1^+ \neq \varnothing$.

Доведення теореми **1.** Припустимо, що положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ вихідної системи (1)–(3) стійке.

У відповідності з [7] розглянемо функцію

$$V = \frac{q\,p}{S_1^2 + 1},$$

де

$$S_1 = S^*(t, q, \frac{\partial H}{\partial p}) = S_1^*(t, q, p) \in C_{tqp}^{(1,1,1)}\left(R \times D_q \times R_p^n\right).$$

Її похідна вздовж векторного поля, що визначається рівняннями (12), має вигляд

$$\frac{dV}{dt} = \frac{L}{S_1^2 + 1}(1 - \mu) + \frac{(H - q\partial H/\partial q + (B(q)q)\lambda)}{S_1^2 + 1}, \quad \mu = 2qp\frac{S_1}{S_1^2 + 1}. \tag{16}$$

У відповідності з припущенням про стійкість рівноваги завжди існує додатна півтраєкторія $\gamma_1^+ \subset s_\varepsilon$, яка проходить через точку $(q^*, p^*) \in \Omega_1^-$. Враховуючи цю обставину, проінтегруємо рівність (16) вздовж відрізка півтраєкторії γ_1^+, який відповідає проміжку $[t_1, t_2]$, де числа t_1, t_2 такі, що

$$\gamma_1^+\Big|_{t_1}^{t_2} \subset \Omega_1^-. \tag{17}$$

При цьому зауважимо, що оскільки $\overline{\gamma_1^+}$ — компактна множина, то модуль швидкості відповідної зображуючої точки $(q(t, q^*, p^*), p(t, q^*, p^*))^T$ при її русі вздовж γ_1^+ рівномірно обмежений, і, отже, можна вказати таке число $a > 0$, що різниця $t_2 - t_1 \geq a$, незалежно від того, наскільки великими є значення $t_1, t_2 \in R$. В результаті інтегрування рівності (16) маємо

$$\frac{q\,p}{S_1^2 + 1}\bigg|_{t_1}^{t_2} = \operatorname{arctg} S_1\Big|_{t_1}^{t_2} + o\left(\operatorname{arctg} S_1\Big|_{t_1}^{t_2}\right) +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(H - q\partial H/\partial q + (B(q)q)\lambda)}{S_1^2 + 1}\, dt. \tag{18}$$

Функція $\operatorname{arctg} S_1$, що фігурує у правій частині (18), є многозначною функцією з точками розгалуження $S_1 = \pm\infty$. Разом з тим перетин множини рівня гамільтоніана $H = h < 0$ і малого околу положення рівноваги є многовидом, в будь-якій точці якого функція S_1 не перетворюється в нескінченність. Без обмеження загальності розгляду будемо вважати надалі, що $S_1\big|_{t=t_1} > 1$.

Виберемо проміжок $[t_1, t_2]$ в межах виконання умови (17) достатньо малим, щоб можна було обмежитись областю головних значень функції $\operatorname{arctg} S_1$, використовуючи, наприклад, зображення останньої у вигляді

$$\operatorname{arctg} S_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{S_1} + \frac{1}{3S_1^3} - \ldots .$$

Тоді з рівності (18) при достатньо малому $\varepsilon > 0$ отримуємо

$$\frac{1}{S_1}\bigg|_{t_1}^{t_2} + O\left(\frac{1}{3S_1^3}\bigg|_{t_1}^{t_2}\right) + o\left(\frac{1}{S_1}\bigg|_{t_1}^{t_2}\right) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(H - q\partial H/\partial q + (B(q)q)\boldsymbol{\lambda})}{S_1^2 + 1} dt. \tag{19}$$

Зауважуючи, що у відповідності з (17) права частина рівності (19) додатна, приходимо до суперечності, оскільки, згідно з структурою лагранжіана

$$L = \frac{dS_1}{dt} = p\dot{q} - H = \frac{1}{2}p^T A^{-1} p - \Pi > 0 \quad \forall (q, p) \in \gamma_1^+\big|_{t_1}^{t_2},$$

вираз в її лівій частині від'ємний. Отже, припущення про стійкість досліджуваного положення рівноваги помилкове. Теорему 1 доведено.

В тому частинному випадку, коли неголономна система (1) – (3) вироджується в голономну: $B(q) = 0$, умови 1, 2 теореми відповідно переходять в такі:

1*) $\omega = \left\{q \in s_\varepsilon^* : \Pi(q) < 0\right\} \neq \varnothing,\ 0 \in \partial\omega$;

2*) $\partial\Pi(q)/\partial q \neq 0 \ \ \forall q \in \omega$.

Зауваження. Для перевірки умови 2 теореми 1 зручно скористатись зображенням досліджуваної неголономної системи у формі Воронця [1, 13].

Теорема 2. *Якщо в точці* $q = 0$ *функція* $\Pi(q)$ *має локальний максимум (необов'язково строгий), причому* $\omega^* = \left\{q \in s_\varepsilon^* : \hat{\Pi}(q) < 0\right\} \neq \varnothing$, *то положення рівноваги* $q = \dot{q} = 0$ *системи* (1) – (3) *нестійке.*

Для доведення теореми 2 достатньо скористатись наслідком леми і схемою доведення теореми 1, зауваживши при цьому, що аналогом множини Ω_1^- є множина Ω_1^+.

Наслідок. *Якщо в точці* $q = 0$ *функція* $\Pi(q)$ *має строгий локальний максимум, то положення рівноваги* $q = \dot{q} = 0$ *системи* (1) – (3) *нестійке.*

Як випливає з теорем 1, 2, неголономність системи знаходить своє відображення в характері умов нестійкості, проте не варто забувати, що останні є лише достатніми. Тому відповідь на питання про вплив неголономних в'язей на стійкість рівноваги, на жаль, поки що залишається неповною.

2. Як відомо [13], питання про стійкість неголономних систем має свої специфічні риси, що є відображенням, зокрема, наявності в неголономних системах многовиду положень рівноваги, розмірність якого не менше числа неголономних в'язей. Але це не означає, що позбавлено сенсу дослідження стійкості фіксованого положення рівноваги, особливо, коли воно дає змогу зробити висновок про стійкість всього многовиду положень рівноваги.

Теорема 3. *Якщо в точці* $q = 0$ *функція* $\Pi(q)$ *має строгий локальний максимум, то многовид положень рівноваги системи* (1) – (3), *що визначається рівняннями*

$$-\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}+B^T(q)\lambda = 0, \qquad \dot{q} = 0,$$

нестійкий.

Доведення. Згідно з теоремою 2, положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ системи (1)–(3) нестійке. Покажемо, що нестійкість має місце і відносно змінних $\dot{q}$. Для цього припустимо супротивне, що нестійкість даного положення рівноваги супроводжується лише нестійкістю щодо змінних q. Тоді, незалежно від того, наскільки малим вибране початкове збурення, існує орбіта системи, зображуюча точка якої в достатньо малому околі точки $q = 0$ досягає деякої сфери $\|q\|^2 = \eta^2$, $0 < \eta = \mathrm{const}$. На останній функція $(-\Pi(q))$ набуває свого мінімуму ξ, де $0 < \xi = \mathrm{const}$. При цьому істотним є те, що число ξ не залежить від мализни збурення.

На підставі рівності (4) маємо

$$T(q, \dot{q}) \geq h + \xi,$$

звідки, враховуючи структуру функції $T(q, \dot{q})$, а також той факт, що нестійкість рівноваги $q = \dot{q} = 0$, згідно зі схемою доведення теореми 2, має місце при $h > 0$, отримуємо $\|\dot{q}\| \geq \varepsilon > 0$. Число ε в даному випадку не залежить від початкового збурення, і, таким чином, нестійкість положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$ супроводжується нестійкістю щодо $\dot{q}$. Оскільки на многовиді положень рівноваги $\dot{q} = 0$, то у відповідності з визначенням [14, с.34] робимо висновок про справедливість теореми 3.

1. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНИТИ, 1983. – Т. 6. – 132 с.
2. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 500 с.
3. *Козлов В. В.* Об устойчивости равновесий неголономных систем // Докл. АН СССР. – 1986. – **288**, № 2. – С. 289–291.
4. *Сосницкий С. П.* Об устойчивости равновесий неголономных систем в одном частном случае // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 440–447.
5. *Сосницкий С. П.* Об устойчивости равновесия неголономных систем // Устойчивость и управление в механических системах. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 70–97.
6. *Bulatovic R.* On the converse of the Lagrange-Dirichlet theorem for nonholonomic nonanalitic systems // C.r. Acad. sci. Ser. I. – 1995. – **320**, № 11. – P. 1407–1412.
7. *Сосницкий С. П.* Действие по Гамильтону и устойчивость равновесия консервативных систем // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 99–106.
8. *Гельдер О.* О принципах Гамильтона и Мопертюи // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 538–563.
9. *Румянцев В. В.* Об интегральных принципах для неголономных систем // Прикл. математика и механика. – 1982. – **46**, № 1. – С. 3–12.
10. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 386 с.
11. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 550 с.
12. *Грауэрт Г., Либ И., Фишер В.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
13. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
14. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973. – 271 с.

Одержано 11.03.98