УДК 515.164.174

О. П. Бондарь (Гос. летн. академия, Кировоград)

ФУНКЦИИ БОТТА И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

In terms of the Eulerian characteristic, we obtain the condition for the existence of Bott functions on differentiable manifolds with a set of critical points which consists of connected homeomorphic submanifolds.

Одержано умову існування функцій Ботта на диференційовних многовидах, що мають множину критичних точок, яка складається із зв'язних гомеоморфних підмноговидів, у термінах ейлерової характеристики.

Пусть M^n — гладкое многообразие $f\colon M^n \to I$ — гладкая функция.

Определение 1. *Функция f называется функцией Ботта* [1], *если множество ее критических точек является несвязным объединением невырожденных гладких подмногообразий, не пересекающихся с краем ∂M^n.*

Рассмотрим функции Ботта, критические подмногообразия P которых являются связными p-мерными подмногообразиями. Частный случай таких функций — так называемые круглые функции Морса — рассмотрен, например, в работах [2 – 7].

Пусть M^n — гладкое компактное многообразие с краем

$$\partial M^n = \partial_- M^n \cup \partial_+ M^n,$$

$f\colon (M^n, \partial_- M^n, \partial_+ M^n) \to ([0, 1], 0, 1)$ — гладкая функция.

Определение 2. *Будем говорить, что многообразие M^n получено из многообразия $\overline{M}^n$ с помощью приклейки невырожденной P-ручки индекса λ, если*

$$M^n = \overline{M}^n \cup_g P \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-p},$$

где $g\colon P \times \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-p} \to \partial_+ M^n$ — гладкое вложение.

Определение 3. *Разложением многообразия M^n на невырожденные P-ручки назовем фильтрацию*

$$M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M^n$$

такую, что $\partial_- M^n \times [0, 1] = M_0$ и каждое n-мерное многообразие M_i получено из M_{i-1} с помощью приклейки невырожденных P-ручек индекса i. В случае, когда $\partial_- M^n = \varnothing$, M_0 состоит из невырожденных P-ручек индекса 0.

Рассмотрим на M^n такие функции Ботта с критическими подмногообразиями P, существование которых эквивалентно разложению M^n на невырожденные P-ручки. В случае $P = S^1$ все функции Ботта являются такими (см. [4, 8]). Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Если на многообразии M^n существует функция Ботта с критическими подмногообразиями P, то*

$$\chi(M^n) = \chi(P) \sum_{\lambda=0}^{n-p} (-1)^\lambda k_\lambda,$$

где k_λ — число P-ручек индекса λ в разложении M^n на невырожденные P-ручки.

Заметим, что если P — точка, то указанное равенство есть известным выражением эйлеровой характеристики конечного клеточного комплекса.

Доказательство. Воспользовавшись тем, что эйлерова характеристика прямого произведения двух пространств равна произведению их эйлеровых характеристик и для любой вырезаемой триады справедливо соотношение

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B),$$

получим

$$\chi(M^n) = \chi(\overline{M}^n) + \chi(P \times D^\lambda \times D^{n-\lambda-p}) - \chi(P \times \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda-p}) =$$
$$= \chi(\overline{M}^n) + \chi(P) - \chi(P)\chi(S^{\lambda-1}) = \chi(\overline{M}^n) + \chi(P)[1 - \chi(S^{\lambda-1})] =$$
$$= \chi(\overline{M}^n) + (-1)^\lambda \chi(P).$$

Учитывая то, что эйлеровы характеристики пространств, одно из которых является деформационным ретрактом другого, равны, получаем требуемое равенство.

Следствие. *Если эйлерова характеристика компактного многообразия M^n без края отлична от нуля, то для того, чтобы на M^n существовала функция Ботта с критическими подмногообразиями P, необходимо, чтобы эйлерова характеристика многообразия M^n была кратна эйлеровой характеристике подмногообразия P.*

При $n \geq 4$ и $P = S^1$ доказанное утверждение обратно теореме Азимова [2].

1. *Bott R.* Lecture on Morse theory, old and new // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – **7**, № 2. – P. 331 – 358.
2. *Asimov D.* Round handles and non-singular Morse – Smale flows // Ann. Math. – 1975. – **102**, № 1. – P. 41 – 54.
3. *Franks J.* The periodic behavior of non-singular Morse – Smale flows // Comment. math. helv. – 1978. – **53**, № 2. – P. 279 – 294.
4. *Miyosihi S.* Foliated round surgery of codimension-one foliated manifolds // Topology. – 1983. – **21**, № 3. – P. 245 – 262.
5. *Morgan J.* Non-singular Morse – Smale flows on 3-dimensional manifolds // Ibid. – 1979. – **18**, № 1. – P. 41 – 53.
6. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т., Шарко В. В.* Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем // Мат. сб. – 1988. – **135**, № 3. – С. 325 – 345.
7. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.
8. *Wall C. T.* Formal deformations // Proc. London Math. Soc. – 1966. – **3**, № 2. – P. 342 – 352.

Получено 12.03.98