

В. Л. Мельник (Чернігів. пед. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВИ ГЛАДКОСТІ МЕЖІ
ДЛЯ СИЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ ОПУКЛОСТІ ОБЛАСТІ

We construct a counter-example for a hypothesis which states that the strong linear convexity of a domain follows from the linear convexity if a set of singularities does not split a boundary.

Побудовано контрприклад до гіпотези, що сильна лінійна опуклість області впливає з лінійною опуклістю, якщо множина особливостей не розбиває межу.

А. П. Южаков та В. П. Кривоколеско [1] показали достатність гладкості межі, щоб з локальної лінійної опуклості області можна було встановити глобальну лінійну опуклість. Виникає питання можливості зняття умови на гладкість межі в усіх її точках. Л. Я. Макарова допускала негладкість межі на деяких злічених її підмножинах [2]. Ю. Б. Зелінський розглянув більш загальні множини особливостей [3].

Метою даної роботи є дослідження гіпотези, що лінійно опукла область буде сильно лінійно опуклою, якщо множина особливостей на межі не розбиває межу і множина точок гладкості скрізь щільна на межі. Побудований контрприклад показує, що ця гіпотеза не має місця.

Означення 1. Область $D \subset \mathbb{C}^n$ називається лінійно опуклою (локально лінійно опуклою), якщо для кожної точки z_0 межі ∂D області D існує гіперплощина L , яка проходить через точку z_0 і не перетинає область $D : L \cap \partial D = \emptyset$ (в деякому околі $U(z_0)$ точки $z_0 : L \cap D \cap U(z_0) = \emptyset$).

Означення 2. Множина $E \subset \mathbb{C}^n$ називається сильно лінійно опуклою, якщо для будь-якої прямої γ множини $\gamma \cap E$ і $\dot{\gamma} \setminus \gamma \cap E$ зв'язні (через $\dot{\gamma}$ позначено пряму γ , доповнену нескінченно віддаленою точкою $\dot{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$).

Нехай D — лінійно опукла область зі зв'язною межею, причому межа ∂D гладка в усіх її точках за винятком множини A такої, що A локально не розбиває ∂D і множина $\partial D \setminus A$ скрізь щільна в ∂D . Тоді всі перерізи D комплексними прямими зв'язні та однозв'язні [3]. Перевіримо гіпотезу про можливість заміни умови, щоб A локально не розбивало межу, глобальною умовою зв'язності $\partial D \setminus A$. Для цього побудуємо поверхню.

Приклад 1. Задамо поверхню $S \subset \mathbb{R}^3$ рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де

$$F = \begin{cases} \sqrt{1-z^4} - \max(|x|, |y|) = 0, & \text{якщо } |x| \text{ або } |y| < \sqrt{1-z^2}; \\ \left(|x| - \sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(|y| - \sqrt{1-z^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}\right)^2 = 0, & \text{якщо } |x| \text{ або } |y| \geq \sqrt{1-z^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Ця поверхня симетрична відносно гіперплощин $x=0$, $y=0$, $x=y$, тому достатньо дослідити її гладкість при обмеженнях $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq y$. При таких обмеженнях перше рівняння з (1) має вигляд

$$\sqrt{1-z^4} - x = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{4z^3}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2z^3}{\sqrt{1-z^4}}, \quad \text{якщо } x > y, \quad z > 0.$$

Якщо $z=0$, то в точці $z=0$, $x=y=1$ границі похідних справа і зліва від

точки $(1, 1, 0)$ не співпадають, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{при } z=0, x > y, \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1 \quad \text{при } z=0, x < y. \end{aligned} \quad (2)$$

Для другого рівняння з (1) одержимо

$$\begin{aligned} (x - \sqrt{1-z^2})^2 + (y - \sqrt{1-z^2})^2 + (\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2})^2 &= 0, \\ \text{якщо } x \geq \sqrt{1-z^2} \quad \text{і} \quad y \geq \sqrt{1-z^2}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 2(x - \sqrt{1-z^2}), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - \sqrt{1-z^2}), \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2(x - \sqrt{1-z^2}) \left(\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}} + 2(y - \sqrt{1-z^2}) \right) \frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}} - \\ &\quad - 2(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}) \left(\frac{-4z^3}{2\sqrt{1-z^4}} + \frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}} \right) = \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} \times \\ &\quad \times (x - \sqrt{1-z^2} + y - \sqrt{1-z^2}) - \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} (\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}) \left(1 - \frac{2z^2}{1+z^2} \right) = \\ &= \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} \left((x - \sqrt{1-z^2} + y - \sqrt{1-z^2}) + (\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}) \left(1 - \frac{2z^2}{1+z^2} \right) \right) = \\ &= \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} \left(x + y - 2\sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-z^4} + 2z^2\sqrt{1-z^2} - \frac{2z^2\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+z^2}} \right). \end{aligned}$$

Тут $\frac{\partial F}{\partial z}$ існує для довільного значення $z \neq \pm 1$. Якщо $z = \pm 1$, то $x = y = 0$ і

$\frac{\partial F}{\partial z}$ також існує з геометричних міркувань, тому що існує єдина горизонтальна дотична площина до поверхні.

Із обчислення градієнта видно, що він існує і відмінний від нуля для всіх точок поверхонь, які задаються двома рівняннями, при $x > y$. Отже, гладкість може порушуватись тільки по лінії A склеювання поверхонь. А саме, при $x = \sqrt{1-z^4}$, $y = \sqrt{1-z^2}$. Зрозуміло, що гладкість в цих точках буде зберігатися, якщо градієнти обох поверхонь, які визначаються рівняннями, в точках склеювання будуть колінеарні.

Для другого рівняння з (1) в точках склеювання маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x,y,z) \in A} &= 2(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}), \\ \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x,y,z) \in A} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x,y,z) \in A} = \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} (\sqrt{1-z^4} + \sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-z^4} + 2z^2\sqrt{1-z^2} - 2z^2 \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+z^2}}) = \frac{4z^3\sqrt{1+z^2}-1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Перевіримо колінеарність градієнтів

$$z_1 = \left(-1, 0, \frac{-2z^3}{\sqrt{1-z^4}}\right)$$

i

$$z_2 = \left(2 \left(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}, 0, \frac{4z^3(\sqrt{1+z^2}-1)}{\sqrt{1+z^2}}\right)\right).$$

Рівність

$$-2(\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2}) = -\frac{4z^3(\sqrt{1+z^2}-1)\sqrt{1-z^4}}{2z^3\sqrt{1+z^2}}$$

очевидна, тому поверхня S гладка для всіх точок, крім чотирьох $|x| = |y| = 1, z = 0$.

Зробивши в рівнянні поверхні $F(x, y, z) = 0$ заміну змінної y на $\sqrt{y^2 + u^2}$, одержимо поверхню обертання Q , яка також буде гладкою для всіх точок, за винятком двох кіл $|x| = \sqrt{y^2 + u^2} = 1$.

Приклад 2. Задамо поверхню $Q \subset \mathbb{R}^3$ рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{1+z^2} - \max(|x|, |\sqrt{y^2+u^2}|) = 0, \\ \text{якщо } |x| < \sqrt{1+z^2} \text{ або } |\sqrt{y^2+u^2}| < \sqrt{1+z^2}; \\ (|x| - \sqrt{1-z^2})^2 + (\sqrt{y^2+u^2} - \sqrt{1-z^2})^2 - (\sqrt{1-z^4} - \sqrt{1-z^2})^2 = 0, \\ \text{якщо } |x| \geq \sqrt{1-z^2} \text{ або } |\sqrt{y^2+u^2}| \geq \sqrt{1-z^2}. \end{cases}$$

Приклад 3. Нехай $D_1 \subset \mathbb{C}^2$ — область, обмежена півколом $\{(x, z) : x^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ і дугами

$$\left\{ (x, z) : \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + z^2 = \frac{4}{9}, z \leq 0, x \leq 0 \right\}$$

та

$$\left\{ (x, z) : \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + z^2 = \frac{4}{9}, z \leq 0, x \geq 0 \right\}.$$

Легко бачити, що область D_1 локально опукла у всіх точках межі, за винятком точки $a = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Нехай $G = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{C}^2$, де $D_2 = \{(y, u) : y^2 + u^2 \leq 1\}$.

Згідно з теоремою 11.1, наведеною в [3], область G не буде сильно лінійно опуклою. Легко перевірити, що точками негладкості межі ∂G будуть точки

множини $A = (\partial D_1 \times \partial D_2) \cup (a \times \partial D_2) \subset \partial G$.

Тепер розглянемо лінійно опуклу область D з особливостями на межі, яку побудуємо, використовуючи попередні приклади.

Приклад 4. Нехай $D \subset \mathbb{C}^2$ — область, межа якої складається з двох частин: з поверхні Q з прикладу 2 і частини межі області G з прикладу 3, а саме її частини, заданої при $z \leq 0$. Точками негладкості межі ∂D буде підмножина множини A , $A \supset A_1 = \{(x, y, z, u) : (x, y, z, u) \in A, z \leq 0\}$.

Ця підмножина: 1) зв'язна, 2) не розбиває ∂G , 3) доповнення $\partial D \setminus A_1$ — скрізь щільна в ∂D множина.

Цей приклад ілюструє, які перешкоди виникають на шляху підсилення леми 7.5 в [3], де для встановлення сильної лінійної опуклості області вимагалось, щоб множина особливостей локально не розбивала межу. Було незрозуміло, чи можна замість локальної умови обмежитись глобальною зв'язністю $\partial D \setminus A$.

Наведений приклад показує, що зв'язності $\partial D \setminus A$ недостатньо для сильної лінійної опуклості області, тому що коли б область D була сильно лінійно опуклою, то такою ж була б і область G , адже ми змінили лише її опуклу частину.

1. Южаков А.П., Кривоколеско В.П. Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в \mathbb{C}^n // Сиб. мат. журн. — 1971. — 12, № 2. — С. 452 — 458.
2. Макарова Л.Я. Достаточные условия линейной выпуклости областей с почти гладкой границей // О голоморфных функциях многих комплексных переменных. — Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1976. — С.87 — 96.
2. Зелинский Ю.Б. Многозначные отображения в анализе. — Киев: Наук. думка, 1993. — 263 с.

Одержано 04.08.98