УДК 517.5

А. Л. Гольберг (Крым. ин-т природоохран. и курорт. стр-ва, Симферополь)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

We consider mappings with bounded integral characteristics. We construct extremal maps of plane rings realizing the minimum of these characteristics.

Розглядаються відображення з обмеженими інтегральними характеристиками. Побудовано екстремальні відображення плоских кілець, що реалізують мінімум цих характеристик.

В теории плоских квазиконформных отображений хорошо известен вариационный метод П. П. Белинского [1] решения экстремальных задач. В работе [2] данный метод применен в классе отображений, квазиконформных в среднем. В настоящей статье предлагается метод p-модулей семейств кривых, применимый для решения экстремальных задач в классе отображений с первыми обобщенными производными. Предложенный метод может быть распространен на многомерные ситуации. В частности, в работе [3] решена задача нахождения экстремального отображения пары сферических колец в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в классе отображений, квазиконформных в (p, q)-среднем.

Множество $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ назовем кривой, если γ — непрерывный образ замкнутого или открытого одномерного интервала.

Пусть Γ — некоторое семейство кривых $\gamma \in \mathbb{R}^2$. Неотрицательную борелевскую функцию ρ будем называть допустимой метрикой семейства Γ, если $\int_\gamma \rho\, dl \geq 1$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Модуль порядка $p, p \geq 1$, семейства Γ (p-модуль) определим по формуле

$$M_p(\Gamma) = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^2} \rho^p\, dx,$$

где $\inf$ берется по классу всех возможных метрик ρ, допустимых для семейства Γ. (Более подробно см., например, [4].)

Далее, пусть G и G^* — ограниченные области в $\mathbb{R}^2$, $f\colon G \to G^*$ — гомеоморфизм. Для таких отображений определим внутреннее и внешнее средние отклонения $I_{\alpha,\beta}(f)$ и $O_{\gamma,\delta}(f)$, $1 < \alpha < \beta \leq 2$, $1 < \gamma < \delta \leq 2$:

$$I_{\alpha,\beta}(f) = \left(\sup \frac{M_\alpha^\beta(\Gamma^*)}{M_\beta^\alpha(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}, \quad O_{\gamma,\delta}(f) = \left(\sup \frac{M_\gamma^\delta(\Gamma)}{M_\delta^\gamma(\Gamma^*)}\right)^{\frac{1}{\delta-\gamma}}, \tag{1}$$

где точная нижняя грань берется по всем семействам кривых, лежащих в G, для которых $M_\beta(\Gamma)$ и $M_\delta(\Gamma^*)$ не равны 0, $\Gamma^* = f(\Gamma)$.

На практике находить средние отклонения по формулам (1) достаточно трудно. Приведем более удобные формулы для нахождения этих величин.

Если отображение $f(x) = (f_1(x), f_2(x))\colon G \to G^*$ имеет в точке $x = (x_1, x_2) \in G$ частные производные $\partial f_i/\partial x_j$, $i, j = 1, 2$, то в этой точке определены выражения: линейное отображение $f'(x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, являющееся формальной производной отображения f, якобиан $|J(x, f)|$ отображения f, минимальное

$l(x,f)=\min\limits_{|h|=1}|f'(x)h|$ и максимальное $L(x,f)=\max\limits_{|h|=1}|f'(x)h|$ растяжения отображения f.

Для такого отображения f определим также следующие величины:

$$M_\alpha(x,f)=\frac{|J(x,f)|}{l^\alpha(x,f)},\qquad M^*_\alpha(x,f)=\frac{L^\alpha(x,f)}{|J(x,f)|},\qquad 1<\alpha\le 2.$$

Введем в расмотрение интегральные характеристики отображения $f\colon G\to\to G^*$:

$$M_{\alpha,\beta}(f)=\int\limits_G M_\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(x,f)\,dx,\qquad M^*_{\gamma,\delta}(f)=\int\limits_G M_\alpha^{*\frac{\gamma}{\delta-\gamma}}(x,f)\,dx,$$
$$1<\alpha<\beta\le 2,\quad 1<\gamma<\delta\le 2. \tag{2}$$

Как следует из работ [5, 6], а также из равенства величин модуля семейства кривых и емкости конденсатора [4, 7], справедливы равенства

$$M_{\alpha,\beta}(f)=I_{\alpha,\beta}(f),\qquad M^*_{\gamma,\delta}(f)=O_{\gamma,\delta}(f).$$

Величины

$$I_{\alpha,\beta}(G,G^*)=\inf I_{\alpha,\beta}(f),\qquad O_{\gamma,\delta}(G,G^*)=\inf O_{\gamma,\delta}(f)$$

назовем соответственно внутренним (α,β)-средним и внешним (γ,δ)-средним коэффициентами квазиконформности пары областей G и G^*, где точная нижняя грань берется по классу всех возможных отображений $f\colon G\to G^*$ с ограниченными характеристиками $M_{\alpha,\beta}(f)$ и $M^*_{\gamma,\delta}(f)$.

Отображения, минимизирующие средние отклонения, назовем экстремальными для соответствующих средних коэффициентов.

Чтобы получить оценки сверху для коэффициентов $I_{\alpha,\beta}(G,G^*)$ и $O_{\gamma,\delta}(G,G^*)$, необходимо построить подходящее отображение области G на G^* и по формулам (2) подсчитать средние отклонения f. Еще сложнее получить нетривиальные оценки снизу, поскольку эти оценки нужно вычислить для средних отклонений всех отображений G на G^*. Для нахождения этих оценок необходимо выяснить как изменяются p-модули семейств кривых при каждом отображении f и затем применить формулы (1).

Рассмотрим следующую задачу: в классе отображений с ограниченными интегральными характеристиками (2) найти экстремальные отображения, доставляющие минимум величинам $I_{\alpha,\beta}(f)$ и $O_{\gamma,\delta}(f)$.

Пусть $D(r_0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2: 0<r_0<|x|<1\}$, $D(\rho_0,1)=\{y\in\mathbb{R}^2: 0<\rho_0<<|y|<1\}$ — круговые кольца, $0<\rho_0\le r_0<1$. Вычислим коэффициенты $I_{\alpha,\beta}(D(r_0,1),D(\rho_0,1))$ и $O_{\gamma,\delta}(D(r_0,1),D(\rho_0,1))$.

Пусть Γ_1 — семейство всех возможных кривых, отделяющих граничные компоненты $D(r_0,1)$, $\Gamma_1^*=f(\Gamma_1)$, где $f\colon D(r_0,1)\to D(\rho_0,1)$ — произвольное отображение с ограниченными характеристиками (2). Тогда по формуле (1) для $1<\alpha<\beta\le 2$ получаем

$$I_{\alpha,\beta}(D(r_0,1),D(\rho_0,1))\ge\left(\frac{M_\alpha^\beta(\Gamma_1^*)}{M_\beta^\alpha(\Gamma_1)}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}.$$

Применяя формулы для $M_\alpha(\Gamma_1^*)$ и $M_\beta(\Gamma_1)$ (см., например, [8]), из (1) при $1 < < \alpha < \beta < 2$ находим

$$I_{\alpha,\beta}(D(r_0,1),D(\rho_0,1)) \ \geq\ 2\pi(2-\beta)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}(2-\alpha)^{-\frac{\beta}{\beta-\alpha}}\left(1-r_0^{2-\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(1-\rho_0)^{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} = P_{\alpha,\beta}.$$

Для $\beta = 2$ оценка приведена в работе [9].

Далее нам необходимо построить отображение $y = f(x)\colon D(r_0,1) \to \to D(\rho_0,1)$ таким образом, чтобы $M_{\alpha,\beta}(f) = P_{\alpha,\beta}$. Для этого рассмотрим полярные системы координат в плоскости прообраза и образа соответственно (r,φ) и (ρ,ψ). Отображение

$$f_1(x) = \left\{\rho = \left[1+\frac{\rho_0^{2-\alpha}-1}{r_0^{2-\beta}-1}\left(r^{2-\beta}-1\right)\right]^{\frac{1}{2-\alpha}},\quad \psi=\varphi,\quad 0<r_0<1,\quad 0\le\varphi<2\pi\right\}$$

является отображением кругового кольца $D(r_0,1)$ на круговое кольцо $D(\rho_0,1)$. В этом случае характеристика отображения $f_1(x)$ такова:

$$M_\alpha(x,f_1) = \frac{L(x,f_1)}{l^{\alpha-1}(x,f_1)} = \frac{2-\beta}{2-\alpha}\,\frac{\rho_0^{2-\alpha}-1}{r_0^{2-\beta}-1}\,r^{\alpha-\beta}.$$

Вычисляя $M_{\alpha,\beta}(f_1)$, находим $M_{\alpha,\beta}(f_1) = P_{\alpha,\beta}$. Таким образом, отображение $f_1(x)\colon D(r_0,1)\to D(\rho_0,1)$ экстремально для коэффициента $I_{\alpha,\beta}(D(r_0,1), D(\rho_0,1))$ и $I_{\alpha,\beta}(D(r_0,1),D(\rho_0,1)) = P_{\alpha,\beta}$.

Пусть Γ_2 — семейство всех возможных кривых, соединяющих граничные компоненты $D(r_0,1)$, $\Gamma_2^* = f(\Gamma_2)$, где $f\colon D(r_0,1)\to D(\rho_0,1)$ — произвольное отображение с ограниченными характеристиками (2). Рассуждая аналогично для $1<\gamma<\delta<2$, находим

$$O_{\gamma,\delta}(D(r_0,1),D(\rho_0,1)) \geq$$

$$\geq\ 2\pi\left(\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\right)^{\frac{(\gamma-1)\delta}{\delta-\gamma}}\left(\frac{1-\delta}{2-\delta}\right)^{\frac{(\delta-1)\gamma}{\delta-\gamma}}\left(r_0^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}-1\right)^{\frac{(1-\gamma)\delta}{\delta-\gamma}}\left(\rho_0^{\frac{\delta-2}{\delta-1}}-1\right)^{\frac{(\delta-1)\gamma}{\delta-\gamma}} = R_{\gamma,\delta}.$$

(В случае $\delta = 2$ см. работу [10].)

Далее строим отображение $y=f(x)\colon D(r_0,1)\to D(\rho_0,1)$ таким образом, чтобы $M^*_{\gamma,\delta}(f) = R_{\gamma,\delta}$. Отображение

$$f_2(x) = \left\{\rho = \left[1+\frac{\rho_0^{\frac{\delta-2}{\delta-1}}-1}{r_0^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}-1}\left(r^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}}-1\right)\right]^{\frac{\delta-1}{\delta-2}},\quad \psi=\varphi,\quad 0<r_0<1,\quad 0\le\varphi<2\pi\right\}$$

является отображением кругового кольца $D(r_0,1)$ на круговое кольцо $D(\rho_0,1)$ и характеристика $M^*_{\gamma,\delta}(f_2)$ отображения $f_2(x)$ в точности совпадает с $R_{\gamma,\delta}$. Таким образом, отображение $f_2(x)\colon D(r_0,1)\to D(\rho_0,1)$ экстремально для коэффициента $O_{\gamma,\delta}(D(r_0,1),D(\rho_0,1))$ и $O_{\gamma,\delta}(D(r_0,1),D(\rho_0,1)) = = R_{\gamma,\delta}$.

В случае $0 < r_0 \le \rho_0 < 1$ отображения $f_2^{-1} : D(r_0, 1) \to D(\rho_0, 1)$ и f_1^{-1}: $D(r_0, 1) \to D(\rho_0, 1)$ экстремальны для коэффициентов $I_{\alpha,\beta}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1))$ и $O_{\gamma,\delta}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1))$ соответственно, поскольку $M_{\alpha,\beta}(f_2^{-1}) = M^*_{\alpha,\beta}(f_2)$ и $M^*_{\gamma,\delta}(f_1^{-1}) = R_{\gamma,\delta}(f_1)$.

***Замечание* 1.** Придавая значения $\alpha = 2p/(p+1)$, $\gamma = 2q/(q+1)$ и устремляя $\beta \to 2$, $\delta \to 2$, видим, что экстремальные отображения f_1 и f_2 совпадают с экстремальными отображениями, приведенными в работах [9, 10]. Полагая, в свою очередь, $p = 1$, получаем отображение, обратное к экстремальному, найденное П. А. Билутой [2] вариационным методом П. П. Белинского [1].

***Замечание* 2.** Рассмотрим характеристики

$$F_{\alpha,\beta}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1)) = \left(\frac{1}{m D(\rho_0, 1)} I_{\alpha,\beta}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1))\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}},$$

$$F^*_{\gamma,\delta}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1)) = \left(\frac{1}{m D(r_0, 1)} O_{\gamma,\delta}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1))\right)^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}}.$$

Переходя к пределу сначала при $\beta \to 2$ и $\delta \to 2$, а затем при $\alpha \to 2$ и $\gamma \to 2$, находим

$$F_{2,2}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1)) = F^*_{2,2}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1)) = \frac{\ln(1/\rho_0)}{\ln(1/r_0)}$$

при $0 < \rho_0 \le r_0 < 1$ и

$$F_{2,2}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1)) = F^*_{2,2}(D(r_0, 1), D(\rho_0, 1)) = \frac{\ln(1/r_0)}{\ln(1/\rho_0)}$$

в случае $0 < r_0 \le \rho_0 < 1$, которые совпадают с коэффициентами квазиконформности пары колец [11].

1. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. – 98 с.
2. *Билута П. А.* Некоторые экстремальные задачи для отображений, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. – 1965. – **6**, № 4. – С. 717 – 726.
3. *Кудьявин В. С., Гольберг А. Л.* Средние коэффициенты квазиконформности пары областей // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1709 – 1712.
4. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. – Новосибирск: Наука, 1983. – 152 с.
5. *Гольберг А. Л.* О некоторых классах плоских топологических отображений с первыми обобщенными производными // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1114 – 1116.
6. *Кудьявин В. С.* Характеристическое свойство одного класса пространственных гомеоморфизмов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 3. – С. 73 – 78.
7. *Ziemer W. P.* Extremal length and p-capacity // Mich. Math. J. – 1969. – **16**. – P. 43 – 51.
8. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983. – 284 с.
9. *Гольберг А. Л., Кудьявин В. С.* Об одном экстремальном отображении плоских колец //Комплексный анализ и теория потенциала: Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины – 1992. – С. 23 – 26.
10. *Гольберг А. Л.* Экстремальные отображения плоских колец и p-модули // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа: Сб. научн. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1990. – С. 25 – 29.
11. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin; New York: Springer, 1971. – 144 p.

Получено 16.03.98