УДК 517.5

В. Е. Силенко (Донецк. ун-т)

НОВАЯ ТЕОРЕМА ТИПА МОРЕРЫ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

We present a new Morera-type theorem in the unit disk.

Наведено нову теорему типу Морери в одиничному крузі.

1. Введение. Пусть $\mathbf{C}$ — комплексная плоскость, $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Группа G конформных автоморфизмов круга D состоит из комплексных матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$ и действует транзитивно на D посредством отображений $g \circ z = (az+b)/(\overline{b}z+\overline{a})$, $z \in D$. Разложение Ивасавы группы G имеет вид $G = KAN$, где $K = SO(2)$ — группа вращений $\mathbf{C}$,

$$A = \left\{a_t = \begin{pmatrix} ch t & sh t \\ sh t & ch t \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R}\right\}, \quad N = \left\{n_s = \begin{pmatrix} 1+is & -is \\ is & 1-is \end{pmatrix} : s \in \mathbf{R}\right\}$$

(см., например, [1, с. 92]).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f \in C(D)$ и для некоторой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\gamma \in D$

$$\int_{g\gamma} f(z)dz = 0 \quad \text{при всех } g \in G. \tag{1}$$

Следует ли отсюда, что f голоморфна в D? В общем случае ответ отрицательный (см., например, [2]), но при некоторых дополнительных предположениях голоморфность f имеет место. Одним из таких предположений является условие $f \in L^2(D)$, полученное М. Л. Аграновским [3] (теорема 1). Это условие весьма общо и не является необходимым для некоторых классов контуров. Например, в случае, когда γ — окружность, неулучшаемые условия получены В. В. Волчковым [2] (теорема 1).

В данной работе в качестве контура γ используется граница „гиперболического квадрата"

$$Q = \{z = n_s a_t \circ 0 : s_0 \le s \le s_0 + 1,\ t_0 \le t \le t_0 + 1\}.$$

Условие (1) ослабляется: оно предполагается выполненным лишь для g из подгруппы NA. При этом показано, что условие $f \in L^2(D)$, накладывающее ограничения на поведение функции вблизи всей границы круга D, можно заменить ограничениями на рост функции лишь в одной точке границы ∂D (см. теорему 1).

По поводу других результатов, связанных с теоремой Мореры, см. [4 – 11] и библиографию к этим работам.

2. Формулировка основного результата. Будем трактовать круг D как плоскость Лобачевского H^2 с неевклидовым расстоянием $d(z_1, z_2)$ между точками z_1, $z_2 \in D$ (см., например, [1, с. 46]). Как обычно, далее гиперболическими прямыми будем называть дуги окружностей (и диаметры) в D, ортогональные границе ∂D, а орициклами — евклидовы окружности в D, касающиеся ∂D. Обозначим

$$\Theta_\tau = \{n_s a_t \circ 0 : s \in \mathbf{R},\ \tau \le t \le \tau + 1\},$$

$$\Lambda_\kappa = \{n_s a_t \circ 0 : \kappa \le s \le \kappa + 1,\ t \ge 0\}.$$

Нетрудно видеть, что множество Θ_τ представляет собой часть круга D, заключенную между двумя орициклами с общей точкой $z_0 = 1$, а множество Λ_κ ограничено двумя гиперболическими прямыми, входящими в z_0, и дугой орицикла $|z - 1/2| = 1/2$.

Теорема. *Пусть* $f \in C(D)$, $\int_{\partial(gQ)} f(z)dz = 0 \quad \forall g \in NA$ *и выполнены условия*:

1) $f(z) = o\left(\dfrac{1}{1-|z|}\right)$, $z \to 1$ *по гиперболическим прямым*;

2) $f(z) = o\left(\dfrac{1}{|\operatorname{Im} z|}\right)$, $z \to 1$ *по орициклам*;

3) $\forall \kappa \in \mathbf{R} \quad f(z) = O\left(\dfrac{1}{1-|z|}\right)$, $z \to 1$, $z \in \Lambda_\kappa$;

4) $\forall \tau \in \mathbf{R} \quad f(z) = O\left(\dfrac{1}{|\operatorname{Im} z|}\right)$, $z \to 1$, $z \in \Theta_\tau$.

Тогда $f(z)$ *голоморфна в* D.

3. Вспомогательные утверждения. Для любой точки z на орицикле ξ, касающемся ∂D в точке b, положим $\langle z, b\rangle$ равным расстоянию от точки $w_0 = 0$ до ξ (со знаком минус, если w_0 лежит внутри ξ). Форма $\langle z, b\rangle$ играет важную роль в теории гиперболического преобразования Фурье (см., например, [1, с. 47 – 50]).

Лемма 1. *Пусть* $f \in C(D)$, $\int_{gQ} f(z)\dfrac{dx\,dy}{(1-|z|^2)^2} = 0 \quad \forall g \in NA$ *и выполнены условия*:

1) $f(z) = o\left(e^{2\langle z,1\rangle}\right)$, $z \to 1$ *по гиперболическим прямым*;

2) $f(z) = o(1)$, $z \to 1$ *по орициклам*;

3) $\forall \tau \in \mathbf{R} \quad f(z) = O(1)$, $z \to 1$, $z \in \Theta_\tau$.

Тогда $f(z) \equiv 0$ *в* D.

Доказательство. По условию

$$\int_{v+t_0}^{v+t_0+1} \int_{v+s_0e^{2v}}^{u+(s_0+1)e^{2v}} f(n_s a_t \circ 0) e^{-2t}\, ds\, dt \equiv 0 \qquad \forall\, u, v \in \mathbf{R}.$$

Отсюда следует, что функция $h(w, v) = \int_v^{v+1} f(n_w a_t \circ 0) e^{-2t}\, dt$ при фиксированном $v \in \mathbf{R}$ периодична по w с периодом $T = e^{-2t_0} e^{2v}$. Из условий 2, 3 получаем $\lim_{w \to \infty} h(w, v) = 0$ и поэтому $h(w, v) \equiv 0 \quad \forall w, v \in \mathbf{R}$. В силу произвольности $v \in \mathbf{R}$ $f(n_w a_{v+n} \circ 0) e^{-2(v+n)} - f(n_w a_v \circ 0) e^{-2v} \equiv 0 \quad \forall w, v \in \mathbf{R}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$. При $n \to \infty$ отсюда и из условия 1 следует утверждение леммы.

Следствие. *Пусть* $f \in C^1(D)$, $\int_{\partial(gQ)} f(z)dz = 0 \quad \forall g \in NA$ *и выполнены условия*:

1) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = o\left(\dfrac{e^{2\langle z,1\rangle}}{(1-|z|)^2}\right)$, $z \to 1$ *по гиперболическим прямым*;

2) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = o\left(\dfrac{1}{(1-|z|)^2}\right)$, $z \to 1$ *по орициклам*;

3) $\forall\tau\in\mathbf{R}\quad \dfrac{\partial f}{\partial\bar z}=O\left(\dfrac{1}{(1-|z|)^2}\right),\ z\to 1,\ z\in\Theta_\tau.$

Тогда $f(z)$ голоморфна в D.

Доказательство. Используя формулу Грина и применяя лемму 1 к функции $F(z)=\dfrac{\partial f}{\partial\bar z}\left(1-|z|^2\right)^2$, получаем требуемое.

Обозначим $p(z)=\dfrac{(1-z)\left(1-|z|^2\right)}{1-\bar z}$; $h(z)=f(z)p(z)$.

Лемма 2. *Если* $\int_{\partial(gQ)}f(z)dz=0\ \ \forall g\in NA$, *то*

$$\int\limits_{\partial(gQ)}f(n_u a_v\circ z)\frac{p(n_u a_v\circ z)}{p(z)}dz\ =\ 0\quad\forall g\in NA,\quad\forall u,v\in\mathbf{R}.$$

Доказательство. Пусть $g_1=n_{u_1}a_{v_1},\ \ g_2=n_{u_2}a_{v_2}$. Сравнивая комплексные интегралы $\int_{\partial(g_2g_1Q)}f(z)dz$ и $\int_{\partial(g_1Q)}f(g_2\circ z)\dfrac{p(g_2\circ z)}{p(z)}dz$, получаем

$$\int\limits_{\partial(g_2g_1Q)}f(z)dz\ =\ \int\limits_{s_1}^{s_2}\left[h(n_{u(s)}a_{v(t_2)}\circ 0)ie^{-2t_2}-h(n_{u(s)}a_{v(t_1)}\circ 0)ie^{-2t_1}\right]ds\ +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[h(n_{u(s_2)}a_{v(t)}\circ 0)-h(n_{u(s_1)}a_{v(t)}\circ 0)\right]dt\ =\ \int\limits_{\partial(g_1Q)}f(g_2\circ z)\,p(g_2\circ z)\frac{dz}{p(z)},$$

где $t_1=v_1+t_0,\ \ t_2=v_1+t_0+1,\ \ s_1=u_1+s_0e^{2v_1},\ \ s_2=u_1+(s_0+1)e^{2v_1},\ \ u(s)=$ $=u_2+se^{2v_2},\ \ v(t)=v_2+t$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть*

$$F_\varepsilon(z)=\int_{P_{2\varepsilon}}f(n_u a_v\circ z)\frac{p(n_u a_v\circ z)}{p(z)}\varphi_\varepsilon(u,v)\,du\,dv,$$

где $f\in C(D),\quad \varphi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbf{R}^2),\quad \varphi_\varepsilon\ge 0,\quad \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subset P_{2\varepsilon}=[-\varepsilon;\varepsilon]\times[-\varepsilon;\varepsilon]$ *и* $\int_{\mathbf{R}^2}\varphi_\varepsilon(u,v)\,du\,dv=1$. *Тогда при* $\varepsilon\to 0$ $F_\varepsilon(z)$ *сходится равномерно к* $f(z)$ *на компактных подмножествах* D.

Доказательство. Пусть $\Omega\subset D$ — произвольный компакт. Обозначим

$$H_\varepsilon(n_s a_t\circ 0)=F_\varepsilon(n_s a_t\circ 0)\,p(n_s a_t\circ 0);\quad \Omega'=\left\{(s,t)\in\mathbf{R}^2\colon n_s a_t\circ 0\in\Omega\right\},$$

$$\tilde\Omega=\left\{(u+se^{2v},\ v+t)\colon (s,t)\in\Omega',\ (u,v)\in P_2=[-1;1]\times[-1;1]\right\},$$

$$\rho(\Omega',\varepsilon)=\max_{\substack{(u,v)\in P_{2\varepsilon}\\(s,t)\in\Omega'}}\sqrt{\left(u+s(e^{2v}-1)\right)^2+v^2}.$$

Так как $h(n_s a_t\circ 0)$ равномерно непрерывна на компакте $\tilde\Omega$ и $\lim_{\varepsilon\to 0}\rho(\Omega',\varepsilon)=$ $=0$, то, используя неравенство

$$\left|H_\varepsilon(n_s a_t\circ 0)-h(n_s a_t\circ 0)\right|\ \le\ \int\limits_{P_{2\varepsilon}}\left|h(n_{u+se^{2v}}a_{t+v}\circ 0)-h(n_s a_t\circ 0)\right|\varphi_\varepsilon(u,v)\,du\,dv,$$

легко показать, что при $\varepsilon\to 0$ $H_\varepsilon(n_s a_t\circ 0)$ сходится равномерно к $h(n_s a_t\circ 0)$

на Ω'. Учитывая ограниченность на Ω' функции $|p(n_s a_t \circ 0)|^{-1}$, получаем утверждение леммы.

4. Доказательство основного результата. В силу леммы 2

$$\int\limits_{\partial(g\Omega)} p(n_u a_v \circ z)\frac{dz}{h(z)} \equiv 0 \quad \forall\, g \in NA \quad \text{и} \quad \forall\, u, v \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Домножим тождество (2) на произвольную функцию $\varphi_\varepsilon(u,v)$, удовлетворяющую условиям леммы 3, и проинтегрируем:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2}\left\{\int\limits_{\partial(g\Omega)} h(n_u a_v \circ z)\frac{dz}{p(z)}\right\}\varphi_\varepsilon(u,v)\,du\,dv = 0 \quad \forall\, g \in NA.$$

Нетрудно увидеть, что для функции $F_\varepsilon(z) = p^{-1}(z)\int_{B_{2\varepsilon}} h(n_u a_v \circ z)\,\varphi_\varepsilon(u,v)\,du\,dv$ выполнены все условия следствия из леммы 1. Таким образом, $F_\varepsilon(z)$ голоморфна в D для любого $\varepsilon > 0$. Используя лемму 3, получаем требуемое.

1. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736 с.
2. *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Мат. заметки. – 1993. – **53**, вып. 2. – С. 30 – 36.
3. *Аграновский М. Л.* Преобразование Фурье на $SL_2(R)$ и теоремы типа Морера // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 6. – С. 1353 – 1356.
4. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1972. – **47**. – P. 237 – 254.
5. *Berenstein C. A., Chang D. C., Pascuas D., Zalcman L.* Variations on the theorem of Morera // Contemp. Mat. – 1992. – **137**. – P. 63 – 78.
6. *Agranovsky M., Berenstein C. A., Chang D. C.* Morera theorem for holomorphic H^p spaces in the Heisenberg group // J. reine und angew. Math. – 1993. – **443**. – S. 49 – 89.
7. *Волчков В. В.* Теоремы типа Мореры на областях со слабым условием конуса // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 15 – 20.
8. *Айзенберг Л. А.* Вариации на тему теоремы Морера и проблемы Помпейю // Докл. АН России. – 1994. – **337**, № 6. – С. 709 – 712.
9. *Волчков В. В.* Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 6. – С. 804 – 809.
10. *Volchkov V. V.* Morera type theorems on the unit disk // Anal. math. – 1994. – **20**. – P. 49 – 63.
11. *Волчков В. В.* Экстремальные задачи о множествах Помпейю // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 7. – С. 3 – 22.

Получено 05.05.99