УДК 517.954

А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, А. Е. Поединчук
(Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины , Харьков)

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ПАРНЫХ СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

We suggest a method of regularization of a class of systems of dual series equations to which a number of problems in the theoretical and mathematical physics can be reduced.

Запропоновано метод регуляризації одного класу систем парних суматорних рівнянь, до яких зводиться ряд задач теоретичної та математичної фізики.

Целью данной работы является построение метода регуляризации применительно к системам парных сумматорных уравнений вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{in\varphi} = 0, \quad \theta < |\varphi| \le \pi; \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x_n e^{in\varphi} - a \sum_{n=-\infty}^{-1} n x_n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{in\varphi}, \quad |\varphi| < \theta, \tag{2}$$

где $g_n = f_n + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} V_{nm} x_m$, θ и a — некоторые известные параметры, а x_n — подлежащие определению коэффициенты.

Отметим, что к системам уравнений (1), (2) сводятся, например, двумерные задачи дифракции электромагнитных волн на металлических экранах, которые являются границами раздела анизотропных гиротропных диэлектрических либо плазменных сред, а также некоторые задачи теории упругости и ряд других задач теоретической и математической физики.

Решение $x = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ системы (1), (2) ищем в пространстве

$$l_2(1) = \left\{ x = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 (|n|+1) < \infty \right\}.$$

Кроме того, предполагаем, что относительно коэффициентов $f = (f_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ и матричного оператора $V = (V_{mn})_{m,n=-\infty}^{+\infty}$ выполнены следующие условия:

а) $f \in l_2(1)$ и матричный оператор $V: l_2 \to l_2$ является ограниченным;

б) ряд в (1) является рядом Фурье некоторой функции из $L_2[-\pi, \pi]$, а ряды, входящие в (2), — из $L_1[-\pi, \pi]$.

Отметим, что ограничения а) и б) на класс решений (1), (2) являются достаточными условиями для существования единственного решения систем такого вида.

В основе предлагаемого метода регуляризации системы уравнений (1), (2) лежит идея сведения ее к эквивалентной ей задаче сопряжения, иными словами задаче Римана – Гильберта для незамкнутого контура окружности единичного радиуса.

Дифференцируя уравнение (1) по φ и вводя обозначения $y_n = x_n n$ при $n \in Z \setminus \{0\}$, где $y_0 = x_0$, сводим (1), (2) к виду

$$\sum_{n=-\infty, n\ne 0}^{+\infty} y_n e^{in\varphi} = 0, \quad \theta < |\varphi| \le \pi, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n e^{in\varphi} - a \sum_{n=-\infty}^{-1} y_n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{in\varphi}, \quad |\varphi| < \theta, \tag{4}$$

$$\sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y_n}{n} = -y_0. \tag{5}$$

Условие (5), учитывающее информацию о потерянном при дифференцировании (1) нулевом коэффициенте, следует из него при $\varphi = \pi$.

Следуя [1], введем две функции комплексной переменной z: $X^+(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n z^n$, $X^-(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} y_{-n} z^{-n}$, аналитические соответственно внутри и вне круга $|z| < 1$.

Пусть γ_1 — дуга окружности $|z| = 1$, соединяющая точки $\exp(-i\theta)$ и $\exp(i\theta)$ и проходящая через точку $z = -1$, а γ_2 — дуга, которая дополняет γ_1 к полной окружности $|z| = 1$.

С помощью введенных функций $X^+(\zeta)$, $X^-(\zeta)$ уравнения (3) и (4) сводятся к следующему виду ($\zeta = \exp(i\theta)$):

$$X^+(\zeta) - X^-(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \gamma_1; \tag{6}$$

$$X^+(\zeta) + aX^-(\zeta) = g(\zeta), \quad \zeta \in \gamma_2, \tag{7}$$

где $g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \zeta^n$. Из (6) следует, что функция

$$X(z) = \begin{cases} X^+(z), & |z| < 1; \\ X^-(z), & |z| > 1, \end{cases}$$

продолжается до функции, аналитической в комплексной плоскости с разрезом вдоль дуги γ_2, причем $X(z) = y_{-1}/z + O(1/z^2)$ при $z \to \infty$.

Таким образом, система уравнений (1), (2) сведена к задаче о восстановлении функции $X(z)$, аналитической вне дуги γ_2, по ее предельным значениям на этой дуге, удовлетворяющим условию (7).

1. Рассмотрим сначала случай $a > 0$.

Предполагая, что правая часть в (2) известна, согласно [2], получаем решение задачи Римана – Гильберта (7) в замкнутой форме вида

$$X(z) = G(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{g(t)\,dt}{G^+(t)(t-z)} + C\right], \tag{8}$$

где

$$G(z) = \left(z - e^{i\theta}\right)^{-1} \exp\left((0.5 - i\beta)\int_{\gamma_2} \frac{dt}{(t-z)}\right)$$

— каноническое решение в самом широком классе h_0 [2] однородной задачи сопряжения, которая соответствует (7), где $\beta = \ln a / 2\pi$, а C — подлежащая определению постоянная, $G^{\pm}(t)$ — предельные значения функции $G(z)$, причем $G^+(t)$ внутри круга $|z| < 1$, а $G^-(t)$ — вне его.

Для $G(z)$ имеет место следующее представление:

$$G(z) = \begin{cases} -\exp(2\beta\theta)\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\beta,\theta)z^n, & |z|<1; \\ z^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(-\beta,\theta)z^{-n}, & |z|>1, \end{cases} \tag{9}$$

где $P_n(\beta,\theta)$ — полиномы Поллачека [3], причем

$$P_0(\beta,\theta) = 1; \quad P_1(\beta,\theta) = \cos(\theta) + 2\beta\sin(\theta);$$

$$P_n(\beta,\theta) = \left(\left(2-\frac{1}{n}\right)\cos(\theta) + \frac{2}{n}\beta\sin(\theta)\right)P_{n-1}(\beta,\theta) - \left(1-\frac{1}{n}\right)P_{n-2}(\beta,\theta)$$

при $n \geq 2$. При $\beta = 0$ полиномы Поллачека переходят в обычные полиномы Лежандра.

Отметим, что представление, аналогичное (9), по-видимому, впервые было получено в [4].

Применяя формулы Сохоцкого – Племеля [2] к (8), в результате преобразований получаем соотношение

$$X^+(e^{i\varphi}) - X^-(e^{i\varphi}) = \frac{a-1}{2a}\hat{g}(e^{i\varphi}) + \frac{F(e^{i\varphi})}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{g(t)\,dt}{G^+(t)(t-e^{i\varphi})} + CF(e^{i\varphi}), \tag{10}$$

справедливое для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. Здесь

$$\hat{g}(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 0, & \theta < |\varphi| \leq \pi; \\ g(e^{i\varphi}), & |\varphi| < \theta, \end{cases}$$

$$F(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 0, & \theta < |\varphi| \leq \pi; \\ G^+(e^{i\varphi}) - G^-(e^{i\varphi}), & |\varphi| < \theta. \end{cases}$$

Переходя в (10) к коэффициентам Фурье с использованием (9) и используя затем (5), в результате несложных преобразований получаем решение системы (1), (2) в виде

$$x_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{nm}g_m, \tag{11}$$

где

$$A_{nm} = \begin{cases} \left(P_{nm}(\theta) + W_m^n(\beta,\theta)\right)n^{-1} + e^{-2\beta\theta}R_n(\beta,\theta)\left(P_{0m}(\theta) + W_m^0(\beta,\theta)\right)n^{-1}, & n \neq 0; \\ -\left(P_{\sigma m}(\theta) + W_m^\sigma(\beta,\theta) + e^{-2\beta\theta}R_n(\beta,\theta)\left(P_{0m}(\theta) + W_m^0(\beta,\theta)\right)\right), & n = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$P_{nm}(\theta) = \frac{a-1}{a}\begin{cases} \dfrac{\theta}{\pi}, & m = n; \\ \dfrac{\sin(n-m)\theta}{(n-m)\pi}, & m \neq n. \end{cases}$$

$$W_m^n(\beta, \theta) =$$

$$= \frac{e^{-\pi\beta}}{2\operatorname{ch}(\pi\beta)} \begin{cases} 0, & m = n = -1; \\ e^{2\beta\theta} \dfrac{n+1}{n-m} \Big(P_n(\beta, \theta) P_{m+1}(\beta, \theta) - P_{n+1}(\beta, \theta) P_m(\beta, \theta) \Big), & n \neq m; \\ \sum\limits_{s=0}^{m+1} \nu_{m+1-s}(\beta, \theta) P_{s-m-1}(-\beta, \theta), & n = m \geq 0; \\ -\sum\limits_{s=0}^{-m-1} \nu_{-m-s-1}(-\beta, \theta) P_{s+m+1}(\beta, \theta), & n = m < -1, \end{cases}$$

$$R_n(\beta, \theta) = \begin{cases} -e^{2\beta\theta} P_n(\beta, \theta), & n \geq 0; \\ -P_{-n-1}(-\beta, \theta), & n \leq -1, \end{cases}$$

$$P_{\sigma m}(\theta) = \frac{a-1}{a} \widehat{P}_{\sigma m}(\theta),$$

где

$$\widehat{P}_{\sigma m}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\pi} \dfrac{\cos(\theta)}{m} - \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin(m\theta)}{m^2}, & m \neq 0; \\ 0, & m = 0, \end{cases},$$

$$R_\sigma(\beta, \theta) = -\exp(2\beta\theta) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{P}_{\sigma m}(\theta) P_m(\beta, \theta),$$

$$W_m^\sigma(\beta, \theta) =$$

$$= \frac{e^{-\pi\beta}}{2\operatorname{ch}(\pi\beta)} \begin{cases} -\nu_1(\beta, \theta) R_\sigma(\beta, \theta) + e^{2\beta\theta} R_\sigma(-\beta, \theta), & m = 0; \\ -\nu_{m+1}(\beta, \theta) R_\sigma(\beta, \theta) + \dfrac{1}{m} \Big(P_m(\beta, \theta) - e^{2\beta\theta} P_{m-1}(\beta, \theta) \Big), & m > 0; \\ \Big(\cos(\theta) - 2\beta \sin(\theta) - e^{-2\beta\theta} \Big) + & \\ \quad + R_\sigma(\beta, \theta) \Big(e^{-2\beta\theta} \cos(\theta) - 2\beta e^{-2\beta\theta} \sin(\theta) - 1 \Big), & m = -1; \\ -e^{-2\beta\theta} \nu_{-m}(-\beta, \theta) R_\sigma(\beta, \theta) - \dfrac{1}{m} \Big(P_{-m}(-\beta, \theta) - e^{-2\beta\theta} P_{-m-1}(-\beta, \theta) \Big), & m < -1. \end{cases}$$

Коэффициенты $\nu_m(\beta, \theta)$ выражаются через полиномы Поллачека согласно следующим реккурентным формулам:

$$\nu_0 = 1; \qquad \nu_1(\beta, \theta) = -\cos(\theta) + 2\beta \sin(\theta);$$

$$\nu_m(\beta, \theta) = P_m(\beta, \theta) - 2\cos(\theta) P_{m-1}(\beta, \theta) + P_{m-2}(\beta, \theta) \quad \text{при} \quad m \geq 2.$$

Лемма 1. *При* $m \to +\infty$, $\theta \in R^1$ *для* $P_m(\beta, \theta)$ *справедлива асимптотическая оценка*

$$P_m(\beta, \theta) = \frac{2\exp\left(-\left(\dfrac{3\pi}{2} + \theta\right)\beta\right)}{\sqrt{2\sin(\theta) m}\, |\Gamma(0,5 + i\beta)|^2} \times$$

$$\times \left\{ \cos\left(\beta \ln(2m \sin\theta) - (m + 0,5)\theta - \frac{3\pi}{4} \right) \operatorname{Re}\Gamma(0,5 + i\beta) + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\beta \ln(2m \sin\theta) - (m + 0,5)\theta - \frac{3\pi}{4} \right) \operatorname{Im}\Gamma(0,5 + i\beta) \right\} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right\},$$

где $\Gamma(z)$ *— гамма-функция, а* $\operatorname{Re}(\ldots)$ *и* $\operatorname{Im}(\ldots)$ *— соответственно ее действительная и мнимая части.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = \left(1 - ze^{-i\theta}\right)^{-1/2-i\beta} \times \times \left(1 - ze^{-i\theta}\right)^{-1/2-i\beta}$, которая является производящей функцией для полиномов Поллачека. В предположении, что θ — комплексная величина с $\operatorname{Re}(\theta) > 0$, в результате применения метода Дарбу к $h(z)$ в [5] получена асимптотическая оценка при $m \to +\infty$ для полиномов Поллачека вида

$$P_m(\beta, \theta) = \left\{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\beta\right)\right\}^{-1}\left(1 - e^{2i\theta}\right)^{-1/2+i\beta} e^{-im\theta} m^{-1/2+i\beta}\left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right). \quad (12)$$

Беря действительную часть от правой части выражения (12), в результате преобразований получаем асимптотическую формулу для $\frac{1}{2}P_m(\beta, \theta)$, откуда и следует требуемое.

Замечание. Асимптотическая оценка для полиномов Поллачека при $m \to \to -\infty$ получается из (12) согласно соотношению

$$P_{-m}(\beta, \theta) = \exp(-2\beta\theta) P_{m-1}(-\beta, \theta),$$

которое получается из интегрального представления для полиномов Поллачека вида

$$P_m(\beta, \theta) = \frac{2e^{-\beta\theta}\operatorname{ch}(\pi\beta)}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\varphi - \beta\ln K(\varphi, \theta)\right)}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}}\, d\varphi,$$

где

$$K(\varphi, \theta) = \frac{\sin((\theta + \varphi)/2)}{\sin((\theta - \varphi)/2)}, \quad 0 < \varphi < \theta < \pi.$$

2. Рассмотрим случай $a < 0$. Решение краевой задачи (7) в этом случае согласно [2] может быть представлено в виде

$$X(z) = \hat{G}(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{g(t)\,dt}{\hat{G}^+(t)(t - z)}\right], \quad (13)$$

где

$$\hat{G}(z) = \exp\left[-i\hat{\beta}\int_{\gamma_2}\frac{dt}{t - z}\right]$$

— каноническое решение однородной краевой задачи, соответствующей (7), причем уже в классе $h(e^{-i\theta}, e^{i\theta})$ [2], где $\hat{\beta} = \ln(-a)/2\pi$. Для $\hat{G}(z)$ справедливо представление вида

$$\hat{G}(z) = \begin{cases} \exp(2\hat{\beta}\theta)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\left(\hat{\beta}, \theta\right) z^n, & |z| < 1; \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} B_n\left(-\hat{\beta}, \theta\right) z^{-n}, & |z| > 1, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$B_0\left(\hat{\beta}, \theta\right) = 1; \qquad B_1\left(\hat{\beta}, \theta\right) = 2\hat{\beta}\sin(\theta);$$

$$B_n\left(\hat{\beta}, \theta\right) = \frac{2(n-1)\cos(\theta) + 2\hat{\beta}\sin(\theta)}{n} B_{n-1}\left(\hat{\beta}, \theta\right) - \frac{n-2}{n} B_{n-2}\left(\hat{\beta}, \theta\right)$$

при $n \geq 2$.

Применяя к (13) формулы Сохоцкого – Племеля, после ряда несложных преобразований получаем соотношение

$$X^+(e^{i\varphi}) - X^-(e^{i\varphi}) = \frac{a-1}{2a}\hat{g}(e^{i\varphi}) + \frac{\hat{F}(e^{i\varphi})}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_2} \frac{g(t)\,dt}{\hat{G}^+(t)(t-e^{i\varphi})}, \tag{15}$$

справедливое для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Здесь

$$\hat{F}(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 0, & \theta < |\varphi| \le \pi; \\ \hat{G}^+(e^{i\varphi}) - \hat{G}^-(e^{i\varphi}), & |\varphi| < \theta. \end{cases}$$

По аналогии со случаем $a > 0$, переходя в (15) к коэффициентам Фурье с использованием представления (14) и используя равенство (5), после преобразований получаем решение системы (1), (2) в виде (11), где матричные коэффициенты A_{nm} при $\hat{\beta} \ne 0$ имеют вид

$$A_{nm} = \begin{cases} \left(P_{nm}(\theta) + \hat{W}_m^n(\hat{\beta}, \theta)\right)n^{-1}, & n \ne 0; \\ -\left(P_{\sigma m}(\theta) + P_{0m}(\theta) + \hat{W}_m^\sigma(\hat{\beta}, \theta) + \hat{W}_m^0(\hat{\beta}, \theta)\right), & n = 0. \end{cases}$$

При $\hat{\beta} = 0$ $(a = -1)$ $\hat{W}_m^n(\hat{\beta}, \theta) = 0$, $\hat{W}_m^\sigma(\hat{\beta}, \theta) = 0$. Коэффициенты $\hat{W}_m^n(\hat{\beta}, \theta)$ здесь определяются следующим образом: если $m \ge 0$, то

$$\hat{W}_m^n(\hat{\beta}, \theta) = \frac{e^{-\pi\hat{\beta}}}{2\operatorname{sh}(\pi\hat{\beta})} \begin{cases} \hat{R}_n(\hat{\beta}, \theta) \text{ при } m = 0; \\ \Omega_{nm}(\hat{\beta}, \theta) \text{ при } n > m \text{ и } n \le 0; \\ e^{2\hat{\beta}\theta} B_{m-n}(\hat{\beta}, \theta) + \Omega_{nm}(\hat{\beta}, \theta) \text{ при } n < m; \\ e^{2\hat{\beta}\theta}\left(1 + \sum\limits_{p=1}^{m} B_p^2(\hat{\beta}, \theta)\right) - 1 \text{ при } n = m, \end{cases}$$

а если $m \le -1$, то

$$\hat{W}_m^n(\hat{\beta}, \theta) = \frac{e^{-\pi\hat{\beta}}}{2\operatorname{cr}(\pi\hat{\beta})} \begin{cases} e^{-2\hat{\beta}\theta}\hat{R}_{n+1}(\hat{\beta}, \theta) \text{ при } m = -1; \\ \hat{\Omega}_{nm}(\hat{\beta}, \theta) \text{ при } n \ge 0 \text{ и } n < m; \\ -e^{-2\hat{\beta}\theta} B_{n-m}(-\hat{\beta}, \theta) + \hat{\Omega}_{mn}(\hat{\beta}, \theta) \text{ при } n > m; \\ 1 - e^{-2\hat{\beta}\theta}\left(1 + \sum\limits_{p=1}^{-m-1} B_p^2(-\hat{\beta}, \theta)\right) - 1 \text{ при } n = m, \end{cases}$$

где

$$\hat{R}_n(\hat{\beta}, \theta) = \begin{cases} e^{2\hat{\beta}\theta} - 1, & n = 0; \\ e^{2\hat{\beta}\theta} B_n(\hat{\beta}, \theta), & n > 0; \\ -B_{-n}(-\hat{\beta}, \theta), & n \le -1, \end{cases}$$

$$\Omega_{nm}(\hat{\beta}, \theta) = -\frac{e^{2\hat{\beta}\theta}}{B_1(\hat{\beta}, \theta)(m-n)}\Big(n(m+1)B_n(\hat{\beta}, \theta)B_{m+1}(\hat{\beta}, \theta) - \\ - m(n+1)B_{n+1}(\hat{\beta}, \theta)B_m(\hat{\beta}, \theta)\Big),$$

$$\hat{\Omega}_{mn}(\hat{\beta}, \theta) = \frac{1}{B_1(\hat{\beta}, \theta)(n-m)}\Big(m(n+1)B_{-m}(-\hat{\beta}, \theta)B_{n+1}(\hat{\beta}, \theta) - \\ - n(m+1)B_{-m-1}(-\hat{\beta}, \theta)B_n(\hat{\beta}, \theta) \Big),$$

а выражение $\hat{W}_m^{\sigma}(\beta, \theta)$ имеет вид

$$\hat{W}_m^{\sigma}(\hat{\beta}, \theta) = \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \hat{W}_m^n(\hat{\beta}, \theta).$$

Пусть

$$F_{mp}^{+}(\hat{\beta}, \theta) = \int_0^{\theta} \varphi \sin\Big((m \pm p)\varphi + \hat{\beta} \ln K(\varphi, \theta)\Big) d\varphi.$$

Тогда выражение для $\hat{W}_m^{\sigma}(\hat{\beta}, \theta)$ может быть представлено в следующем виде:

$$\hat{W}_m^{\sigma}(\hat{\beta}, \theta) = -\frac{e^{-\pi\hat{\beta}}}{\pi} \begin{cases} e^{\hat{\beta}\theta} \sum\limits_{p=0}^{m} B_p(\hat{\beta}, \theta) F_{mp}^{-}(\hat{\beta}, \theta), & m \geq 0; \\ e^{-\hat{\beta}\theta} \sum\limits_{p=0}^{-m-1} B_p(-\hat{\beta}, \theta) F_{mp}^{+}(\hat{\beta}, \theta), & m \leq -1. \end{cases}$$

Лемма 2. *При* $m \to +\infty$ *для* $B_m(\hat{\beta}, \theta)$ *справедливо неравенство*

$$\left| B_m(\hat{\beta}, \theta) \right| \leq \frac{2}{\pi} \left| \operatorname{sh}\left(\pi\hat{\beta}\right) \right| \exp\left(-\hat{\beta}\left(\theta + \frac{3\pi}{2} \right) \right) m^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\hat{h}(z) = (1 - ze^{i\theta})^{i\hat{\beta}}(1 - ze^{-i\theta})^{-i\hat{\beta}}$, которая является производящей функцией для $B_m(\hat{\beta}, \theta)$. Как и в случае полиномов Поллачека, применяя к $\hat{h}(z)$ метод Дарбу, при $m \to +\infty$ получаем следующее соотношение:

$$B_m(\hat{\beta}, \theta) \approx 2\frac{e^{-\hat{\beta}(3\pi/2 + \theta)}}{m!} \operatorname{Re}\left(e^{i\lambda_m} \left(i\hat{\beta} \right)_m \right), \tag{16}$$

где $\lambda_m = \hat{\beta} \ln(2\sin(\theta)) - m\theta$, а $(i\hat{\beta})_m = i\dfrac{\operatorname{sh}\left(\pi\hat{\beta}\right)}{\pi} \Gamma\left(m + i\hat{\beta}\right)\Gamma\left(1 - i\hat{\beta}\right)$. Поскольку

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\lambda_m} \left(i\hat{\beta} \right)_m \right) \leq \left| e^{i\lambda_m} \left(i\hat{\beta} \right)_m \right| = \frac{\left| \operatorname{sh}\left(\pi\hat{\beta}\right) \right|}{\pi} \left| \Gamma\left(m + i\hat{\beta}\right)\Gamma\left(1 - i\hat{\beta}\right) \right| \leq \frac{\left| \operatorname{sh}\left(\pi\hat{\beta}\right) \right|}{\pi} (m-1)!,$$

то с учетом последнего и (16) получаем требуемое.

Замечание. При $m \to -\infty$ для $B_m(\hat{\beta}, \theta)$ с учетом соотношения $B_{-m}(\hat{\beta}, \theta) = -e^{-2\hat{\beta}\theta} B_m(-\hat{\beta}, \theta)$, которое получается из интегрального представления для $B_m(\hat{\beta}, \theta)$ вида

$$B_m(\hat{\beta}, \theta) = \frac{2}{\pi} e^{-\hat{\beta}\theta} \operatorname{sh}\left(\pi\hat{\beta}\right) \int_0^{\theta} \cos(m\varphi - \hat{\beta} \ln K(\varphi, \theta))\, d\varphi, \quad m \neq 0,$$

имеем

$$\left|B_m(\hat{\beta}, \theta)\right| \leq \frac{2e^{-2\hat{\beta}\theta}}{\pi}\left|\operatorname{sh}\left(\pi\hat{\beta}\right)\right|\exp\left(\hat{\beta}\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)\right)|m|^{-1}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Матрица* $A = (A_{nm})_{n,m=-\infty}^{+\infty}$ *задает в пространстве* l_2 *компактный оператор. Если* $g = (g_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \in l_2(1)$, *то и* $x = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \in l_2(1)$. *Ряды в* (1) *сходятся равномерно на* $[-\pi, \pi]$, *а в* (2) — *на* $[-\pi, \pi]$, *исключая сколь угодно малые окрестности точек* $\varphi = \pm\theta$.

Доказательство теоремы из-за его громоздкости здесь не приводим. Отметим только, что оно основывается на использовании представлений для матричных коэффициентов системы (11), а также утверждений лемм 1 и 2.

Таким образом, исходная система парных сумматорных уравнений (1), (2) сведена к операторному уравнению вида

$$x + Hx = h, \tag{17}$$

где $H = AV\colon l_2 \to l_2$ — компактный оператор, а $h = Af$. Иными словами, уравнение (17) является уравнением второго рода в l_2.

В заключение отметим, что предложенный выше метод регуляризации согласно результатам [6] легко обобщается на случай, когда a — комплексное число, причем $-\pi < \arg(a) < \pi$.

1. *Агранович З. С., Марченко В. А., Шестопалов В. П.* Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // Журн. техн. физики. – 1962. – **32**, № 4. – С. 381–394.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 599 с.
3. *Pollaczek F.* Sur une generalisation des polynomes de Legendre // C. r. Acad. sci. – 1949. – **228**. – P. 1363–1365.
4. *Хорошун В. В.* Дифракция плоских электромагнитных волн на металлической решетке с гиромагнитной средой // Радиотехника. – 1967. – Вып. 4. – С. 20–25.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
6. *Хорошун В. В.* К теории обобщенных полиномов Лежандра // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 6. – С. 837–839.

Получено 03.02.2000