УДК 519.21

А. Я. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ*

We present necessary and sufficient conditions for the existence of a homogeneous solution for a class of partial equations in the Banach space with homogeneous random perturbation.

Наведено необхідні та достатні умови існування однорідного розв'язку для одного класу рівнянь з частинними похідними у банаховому просторі з однорідним випадковим збуренням.

Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — комплексное сепарабельное банахово пространство и $\mathcal{L}(B)$ — кольцо линейных ограниченных операторов, действующих из B в B с нормой, которая также обозначается символом $\|\cdot\|$; $\overline{0}$ — нулевой элемент в B; I и Θ — единичный и нулевой операторы, а $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ — соответственно спектр и множество регулярных значений оператора $A \in \mathcal{L}(B)$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — полное вероятностное пространство. Все приведенные ниже равенства между случайными величинами и случайными элементами предполагаются выполненными с вероятностью 1. Интегралы от B-значных функций есть интегралы Бохнера. Используемые далее свойства случайных элементов можно найти, например, в [1].

В данной статье рассматриваются B-значные случайные поля в $\mathbf{R}^2$, которые с вероятностью 1 непрерывны по норме в B в $\mathbf{R}^2$. Напомним, что случайное B-значное поле $\xi = \{\xi(s,t) \mid (s,t) \in \mathbf{R}^2\}$ называется однородным, если для любых $n \in \mathbf{N}$ и набора точек $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \ldots, (s_n, t_n)$ совместное распределение вероятностей случайных элементов $\xi(s_1, t_1), \xi(s_2, t_2), \ldots, \xi(s_n, t_n)$ инвариантно относительно параллельных переносов набора точек (s_1, t_1), $(s_2, t_2), \ldots, (s_n, t_n)$ в $\mathbf{R}^2$.

Пусть $\{D, E\} \subset \mathcal{L}(B)$ — фиксированные операторы и ξ — однородное B-значное случайное поле в $\mathbf{R}^2$. Рассмотрим следующее уравнение в частных производных:

$$x''_{12}(s,t) = Dx'_1(s,t) + Ex'_2(s,t) - DEx(s,t) + \xi(s,t), \qquad (s,t) \in \mathbf{R}^2. \tag{1}$$

Однородным решением $x = \{x(s,t) \mid (s,t) \in \mathbf{R}^2\}$ уравнения (1) называется однородное B-значное случайное поле в $\mathbf{R}^2$, для которого с вероятностью 1 непрерывны по норме в B случайные поля x, x'_1, x'_2, x''_{12} и выполняется равенство (1).

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что* $DE = ED$. *Уравнение* (1) *имеет единственное однородное решение* x, $\mathrm{E}\|x(0,0)\| < +\infty$, *для любого однородного B-значного поля* ξ *с конечным* $\mathrm{E}\|\xi(0,0)\|$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(D) \cap i\mathbf{R} = \varnothing, \qquad \sigma(E) \cap i\mathbf{R} = \varnothing. \tag{2}$$

Доказательство. 1. Предположим, что уравнение (1) для каждого однородного B-значного поля ξ с $\mathrm{E}\|x(0,0)\| < +\infty$ имеет единственное однородное решение x с $\mathrm{E}\|x(0,0)\| < +\infty$. Пусть $z \in B$, $z \neq \overline{0}$, — произвольный элемент и α, β — произвольные действительные числа. B-значное случайное поле

$$\xi(s,t) := ze^{i\theta + i\alpha s + i\beta t}, \qquad (s,t) \in \mathbf{R}^2, \tag{3}$$

---

* Выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 01.07/103).

где θ — равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$ случайная величина, однородно и $\mathrm{E}\|x(0,0)\| = \|z\|$. Рассмотрим соответствующее полю из (3) единственное однородное решение x, для которого $\mathrm{E}\|x(0,0)\| < +\infty$, уравнения (1):

$$x''_{12}(s,t) = Dx'_1(s,t) + Ex'_2(s,t) - DEx(s,t) + ze^{i\theta + i\alpha s + i\beta t}, \quad (s,t) \in \mathbf{R}^2. \tag{4}$$

Согласно теореме Хана – Банаха существует линейный непрерывный функционал f, для которого $\langle f, z \rangle$ — значение на элементе z — равно 1. Тогда из (1) следует

$$\langle f, x''_{12}(s,t) - Dx'_1(s,t) - Ex'_2(s,t) + DEx(s,t) \rangle = e^{i\theta + i\alpha s + i\beta t}, \quad (s,t) \in \mathbf{R}^2.$$

Следовательно, $(B \times \mathbf{C})$-значное случайное поле $\{(x(s,t), e^{i\theta + i\alpha s + i\beta t}) \mid (s,t) \in \in \mathbf{R}^2\}$ однородно и поэтому

$$y(s,t) := x(s,t)e^{-i\theta - i\alpha s - i\beta t}, \quad (s,t) \in \mathbf{R}^2,$$

— однородное B-значное поле в $\mathbf{R}^2$, причем $\mathrm{E}\|y(s,t)\| = \mathrm{E}\|x(0,0)\| < +\infty$ и $\mathrm{E}\, y(s,t) = \mathrm{E}\, y(0,0) = \mathrm{E}\left(x(0,0)e^{-i\theta}\right) := u \in B$ для всех $(s,t) \in \mathbf{R}^2$.

Перепишем равенство (4) в виде

$$x''_{12}(s,t)e^{-i\theta - i\alpha s - i\beta t} = Dx'_1(s,t)e^{-i\theta - i\alpha s - i\beta t} + Ex'_2(s,t)e^{-i\theta - i\alpha s - i\beta t} - \\ - DEx(s,t)e^{-i\theta - i\alpha s - i\beta t} + z, \quad (s,t) \in \mathbf{R}^2, \tag{5}$$

и затем проинтегрируем равенство (5) по прямоугольнику $[s_0, s] \times [t_0, t]$ для произвольных $s_0 < s$, $t_0 < t$. Получим равенство

$$J_1(s_0,s,t_0,t) = J_2(s_0,s,t_0,t) + J_2(s_0,s,t_0,t) - J_4(s_0,s,t_0,t) + z, \\ (s,t) \in \mathbf{R}^2, \tag{6}$$

в котором

$$J_1(s_0,s,t_0,t) := \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} x''_{12}(u,v)e^{-i\theta - i\alpha u - i\beta v}\,du\,dv,$$

$$J_2(s_0,s,t_0,t) := \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} Dx'_1(u,v)e^{-i\theta - i\alpha u - i\beta v}\,du\,dv,$$

$$J_3(s_0,s,t_0,t) := \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} Ex'_2(u,v)e^{-i\theta - i\alpha u - i\beta v}\,du\,dv,$$

$$J_4(s_0,s,t_0,t) := \int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} DEx(u,v)e^{-i\theta - i\alpha u - i\beta v}\,du\,dv.$$

Элементарные вычисления приводят к следующим равенствам:

$$J_1(s_0,s,t_0,t) = y(s,t) - y(s,t_0) - y(s_0,t) + y(s_0,t_0) + i\beta\int_{t_0}^{t}(y(s,v) - y(s_0,v))\,dv + \\ + i\alpha\int_{s_0}^{s}(y(u,t) - y(u,t_0))\,du - \alpha\beta\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} y(u,v)\,du\,dv,$$

$$J_2(s_0, s, t_0, t) = D\int_{t_0}^{t} (y(s,v) - y(s_0,v))\,dv + i\alpha D\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} y(u,v)\,du\,dv,$$

$$J_3(s_0, s, t_0, t) := E\int_{s_0}^{s} (y(u,t) - y(u,t_0))\,du + i\beta E\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t} y(u,v)\,du\,dv.$$

Из этих равенств с учетом однородности поля y имеем

$$\mathrm{E}J_1(s_0, s, t_0, t) = -\alpha\beta u(s-s_0)(t-t_0),$$

$$\mathrm{E}J_2(s_0, s, t_0, t) = i\alpha D u(s-s_0)(t-t_0),$$

$$\mathrm{E}J_3(s_0, s, t_0, t) = i\beta E u(s-s_0)(t-t_0),$$

$$\mathrm{E}J_4(s_0, s, t_0, t) = DEu(s-s_0)(t-t_0).$$

Переходя теперь к математическим ожиданиям в (6) и сокращая на $(s-s_0)(t-t_0)$, получаем

$$-\alpha\beta u = i\alpha D u + i\beta E u - DEu + z$$

или

$$(DE - i\alpha D - i\beta E - \alpha\beta I)u = z \Leftrightarrow (D - i\beta)(E - i\alpha I)u = z.$$

Применяя дважды теорему Банаха, заключаем, что

$$(i\beta) \in \rho(D), \qquad (i\alpha) \in \rho(E). \tag{7}$$

Заметим, что при доказательстве первой части теоремы условие коммутируемости операторов D и E не использовалось. Это доказательство можно провести и при более общих предположениях, например рассмотреть некоторые неограниченные операторы или уравнения иной структуры, чем (1).

2. Предположим, что выполняются соотношения (7) и ξ — однородное B-значное поле с $\mathrm{E}\|x(0,0)\| < +\infty$.

Пусть P_D^- и P_D^+ — спектральные проекторы Рисса, которые соответствуют спектральным множествам оператора D, расположенным соответственно в левой и правой полуплоскостях комплексной плоскости. (О спектральных проекторах и используемых далее их свойствах см., например, [2].) Рассмотрим также аналогичные проекторы Рисса P_E^- и P_E^+ для оператора E. Все введенные проекторы — ограниченные линейные операторы, которые при условиях теоремы коммутируют между собой и имеют следующие свойства:

$$\begin{gathered} P_D^- + P_D^+ = P_E^- + P_E^+ = I, \qquad P_D^- P_D^+ = P_E^- P_E^+ = \Theta, \\ P_D^- P_E^- + P_D^+ P_E^- + P_D^- P_E^+ + P_D^+ P_E^+ = I. \end{gathered} \tag{8}$$

Положим также $D^{\pm} = P_D^{\pm} D$, $E^{\pm} = P_E^{\pm} E$ и заметим, что

$$D^- + D^+ = D, \quad E^- + E^+ = E, \quad D^-E^- + D^-E^+ + D^+E^- + D^+E^+ = DE.$$

Известно, что при условиях (7) выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{0} \|e^{D^+ t}\|dt + \int_{0}^{+\infty} \|e^{D^- t}\|dt + \int_{-\infty}^{0} \|e^{E^+ t}\|dt + \int_{0}^{+\infty} \|e^{E^- t}\|dt < +\infty \tag{9}$$

(см., например, [2]).

Обозначим $m^-(s) := (-\infty, s]$, $m^+(s) := [s, +\infty)$ для $s \in \mathbf{R}$ и определим следующие случайные B-значные поля:

$$x^{jk}(s,t) := (j1)(k1) \iint\limits_{m^j(s)\times m^k(t)} e^{E^j(s-u)+D^k(t-v)}\xi(u,v)\,du\,dv,$$

$$(s,t)\in \mathbf{R}^2; \quad j,k = -,+.$$

В последнем равенстве при выполнении условия (9) интегралы имеют смысл с вероятностью 1 в силу теоремы Бохнера. Каждое из B-значных случайных полей x^{jk}, $j,k=-,+$, однородно, непрерывно с вероятностью 1 в $\mathbf{R}^2$ и, кроме того, $\mathrm{E}\left\|x^{jk}(0,0)\right\| < +\infty$, $j,k=-,+$. Доказательство этого утверждения аналогично случаю одномерного параметра (см. [3]), при этом поля $\left\{x^{jk}\right\}$ однородно связаны.

Определим теперь B-значное случайное поле $x = \{x(s,t) \mid (s,t)\in \mathbf{R}^2\}$ следующим образом:

$$x(s,t) = x^{--}(s,t) + x^{-+}(s,t) + x^{+-}(s,t) + x^{++}(s,t), \qquad (s,t)\in\mathbf{R}^2.$$

Случайное поле x однородно, для него $\mathrm{E}\|x(0,0)\| < +\infty$ и согласно (8)

$$P_D^{\pm}P_E^{\pm}x = x^{\pm\pm}.$$

Используя свойства интеграла Бохнера, имеем

$$\frac{\partial x^{jk}(s,t)}{\partial s} = (k1)P_E^j \int\limits_{m^k(t)} e^{D^k(t-v)}\xi(s,v)\,dv + E^j x^{jk}(s,t),$$

$$(s,t)\in\mathbf{R}^2, \quad j,k=-,+. \tag{10}$$

Учитывая условие коммутируемости, из (10) получаем также следующее равенство для второй производной поля x^{jk}:

$$\frac{\partial^2 x^{jk}(s,t)}{\partial s\,\partial t} = P_E^j P_D^k \xi(s,t) + (k1)P_E^j D^k \int\limits_{m^k(t)} e^{D^k(t-v)}\xi(s,v)\,dv + E^j\frac{\partial x^{jk}(s,t)}{\partial t} =$$

$$= P_E^j P_D^k\xi(s,t) + D^k\left(\frac{\partial x^{jk}(s,t)}{\partial s} - E^j x^{jk}(s,t)\right) + E^j\frac{\partial x^{jk}(s,t)}{\partial t} =$$

$$= P_E^j P_D^k\xi(s,t) + D^k\frac{\partial x^{jk}(s,t)}{\partial s} + E^j\frac{\partial x^{jk}(s,t)}{\partial t} - E^j D^k x^{jk}(s,t) =$$

$$= P_E^j P_D^k\left(\xi(s,t) + D\frac{\partial x(s,t)}{\partial s} + E\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} - DEx(s,t)\right), \quad j,k=-,+. \tag{11}$$

Используем соотношение (8), определение поля x и формулу (11) для получения равенства

$$\frac{\partial^2 x(s,t)}{\partial s\,\partial t} = \xi(s,t) + D\frac{\partial x(s,t)}{\partial s} + E\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} - DEx(s,t).$$

Таким образом, однородное B-значное поле является решением уравнения (1), причем $\mathrm{E}\|x(0,0)\| < +\infty$.

Докажем теперь единственность. Пусть B-значное однородное поле z, для которого $\mathrm{E}\|z(0,0)\| < +\infty$, является решением уравнения (1):

$$\frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial s\,\partial t} = D\frac{\partial z(s,t)}{\partial s} + E\frac{\partial z(s,t)}{\partial t} - DEz(s,t) + \xi(s,t), \qquad (s,t)\in\mathbf{R}^2. \tag{12}$$

Из (12) имеем

$$(j1)(k1) \iint\limits_{m^j(s)\times m^k(t)} e^{E^j(s-u)+D^k(t-v)}\left(\frac{\partial^2 z^{jk}(u,v)}{\partial u\partial v} - \right.$$

$$\left. - D^k \frac{\partial z^{jk}(u,v)}{\partial u} - E^j \frac{\partial z^{jk}(u,v)}{\partial v} + D^k E^j z^{jk}(u,v)\right) du\,dv =$$

$$= (j1)(k1) \iint\limits_{m^j(s)\times m^k(t)} e^{E^j(s-u)+D^k(t-v)} \xi(u,v)\,du\,dv, \quad (s,t)\in \mathbf{R}^2, \quad j,k = -,+. \quad (13)$$

Интеграл в правой части (13) существует с вероятностью 1 при выполнении условия (9) для однородного поля ξ с $\mathrm{E}\|\xi(0,0)\| < +\infty$.

Учитывая однородность поля z, $\mathrm{E}\|z(0,0)\| < +\infty$ и условие (9), с помощью формулы интегрирования по частям находим

$$-D^k \iint\limits_{m^j(s)\times m^k(t)} e^{E^j(s-u)+D^k(t-v)} \frac{\partial z^{jk}(u,v)}{\partial u} du\,dv =$$

$$= (j1) D^k \int\limits_{m^k(t)} e^{D^k(t-v)} z^{jk}(s,v)\,dv +$$

$$+ D^k E^j \iint\limits_{m^j(s)\times m^k(t)} e^{E^j(s-u)+D^k(t-v)} z^{jk}(u,v)\,du\,dv,$$

$$(s,t)\in \mathbf{R}^2, \quad j,k = -,+. \quad (14)$$

Аналогично получаем равенство

$$\iint\limits_{m^j(s)\times m^k(t)} e^{E^j(s-u)+D^k(t-v)} \frac{\partial^2 z^{jk}(u,v)}{\partial u\partial v} du\,dv =$$

$$= (j1)(k1) z^{jk}(s,t) - (j1) D^k \int\limits_{m^k(t)} e^{D^k(t-v)} z^{jk}(s,v)\,dv +$$

$$+ E^j \iint\limits_{m^j(s)\times m^k(t)} e^{E^j(s-u)+D^k(t-v)} \frac{\partial z^{jk}(u,v)}{\partial v} du\,dv, \quad (s,t)\in \mathbf{R}^2, \quad j,k = -,+. \quad (15)$$

Из равенств (13) – (15) получаем

$$z^{jk}(s,t) = (j1)(k1) \iint\limits_{m^j(s)\times m^k(t)} e^{E^j(s-u)+D^k(t-v)} \xi(u,v)\,du\,dv,$$

$$(s,t)\in \mathbf{R}^2, \quad j,k = -,+.$$

Таким образом, $z = x$, теорема 1 доказана.

1. *Круглов В. М.* Дополнительные главы теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 1984. – 264 с.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
3. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Выща шк., 1992. – 329 с.

Получено 30.10.2001