УДК 517.5

В. П. Моторный (Днепропетр. нац. ун-т)

ОБ ОДНОСТОРОННЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ С УЧЕТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ*

We investigate a pointwise approximation of functions belonging to the class H^ω ($\omega(t)$ is a module of continuity convex upwards) by absolutely continuous functions with varying smoothness.

Досліджується поточкове наближення функцій із класу H^ω ($\omega(t)$ — опуклий догори модуль неперервності) абсолютно неперервними функціями зі змінною гладкістю.

Пусть H^ω — класс функций f, определенных на отрезке $[-1; 1]$ и удовлетворяющих условию

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le \omega(|x_1-x_2|),$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Если $\omega(t) = Mt^\alpha$, $M>0$, $0<\alpha\le 1$, вместо H^ω будем использовать обозначение MH^α, в частности, если $M = 1$, то $H^\alpha = 1H^\alpha$.

Актуальность задачи о промежуточном приближении периодических функций из класса H^ω функциями из класса MH^1 установлена в работах Н. П. Корнейчука [1, 2]. В работах [3 – 6] исследовались также задачи о поточечном промежуточном и поточечном одностороннем приближении функций из класса H^ω абсолютно непрерывными функциями с переменной гладкостью.

В работе [6] установлен следующий результат.

Пусть $0<\alpha<1$. *Тогда для любой функции* $f\in H^\alpha$ *и любого натурального числа* n *существует абсолютно непрерывная функция* $\phi_n(x)$ *такая, что:*

1) *для производной* $\phi_n'(x)$ *в точках ее существования выполняется неравенство*

$$|\phi_n'(x)| \le \alpha\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{\alpha-1};$$

2) *для любого* $x\in[-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$0 \le f(x)-\phi_n(x) \le (1-\alpha)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{\alpha} + O\left(n^{-3/2}\right). \tag{1}$$

Целью настоящей работы является получение оценки одностороннего поточечного приближения функций из класса H^ω, уточняющей, в частности, остаточный член в неравенстве (1).

Введем еще некоторые определения. Пусть $x_0 = 0$, $x_1 = a/n$ и

$$x_{k+1} = x_k + \frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad n \ge 5, \tag{2}$$

— точки отрезка $[0; 1]$, где a — некоторое постоянное число из отрезка $[1; \pi]$. Обозначим через x_{N-1} наибольшую из тех точек, для которых выполняется неравенство $x_{N-1}\le \bar{x}$, где число $\bar{x}<1$ такое, что $\bar{x} + a\sqrt{1-\bar{x}^2}/n = 1$.

* Выполнена при финансовой поддержке ГФФИ (проект № 01.07 / 00241).

Через x_N обозначим 1. Понятно, что для числа x_N равенство (2) может и не выполняться. Положим $E_k = [-x_{k+1}, -x_k] \cup [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Можно считать, что $\omega(t)$ — дифференцируемая функция на отрезке $[0, 2]$. Пусть, далее, $M_k = \omega'\left(a\sqrt{1-x_{k-1}^2}\,/\,n\right)$, а $\Delta_k = \left(\omega\left(a\sqrt{1-x_{k-1}^2}\,/\,n\right) - M_k a\sqrt{1-x_{k-1}^2}\,/\,n\right)\Big/2$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции* $f \in H^\omega$ *и любого числа* $a \in [1; \pi]$ *существует последовательность абсолютно непрерывных функций* $\left\{\Psi_{n,a}(f;x)\right\}$ *таких, что:*

1) *почти всюду выполняется неравенство*

$$\left|\Psi'_{n,a}(f;x)\right| \le M_{k+1}, \quad x \in E_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

2) *имеет место оценка поточечного приближения функции* $f(x)$ *снизу*:

$$0 \le f(x) - \Psi_{n,a}(f;x) \le 2\Delta_k, \quad x \in E_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующее утверждение.

Лемма. *Выполняются неравенства*

$$2(\Delta_k - \Delta_{k+1}) \le (M_{k+1} - M_k)(x_{k+1} - x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Доказательство. Применяя теорему Лагранжа и учитывая выпуклость функции $\omega(t)$, получаем

$$2(\Delta_k - \Delta_{k+1}) = \omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}\right) - M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2} -$$

$$- \omega\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right) + M_{k+1}\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2} \le$$

$$\le \omega'\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right)\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2} - \frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right) - M_k\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2} +$$

$$+ \omega'\left(\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2}\right)\frac{a}{n}\sqrt{1-x_k^2} = (M_{k+1} - M_k)\frac{a}{n}\sqrt{1-x_{k-1}^2}.$$

Из полученного неравенства и равенства (2) следует (3). Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Для заданной функции $f(t)$ из класса H^ω обозначим через $\psi_{k,a}(t)$ функцию из класса $M_k H^1$, существование которой установлено Н. П. Корнейчуком [1, 2], такую, что

$$\left|f(t) - \psi_{k,a}(t)\right| \le \Delta_k, \quad t \in [-1; 1],$$

и будем считать, что функция $\psi_{k,a}(t)$ задана в виде, указанном А. В. Покровским [7]:

$$\psi_{k,a}(t) = \inf_{u \in [-1,1]}\left\{f(u) + M_k|t-u|\right\} + \Delta_k.$$

Пусть

$$\phi_{k,a}(t) = \psi_{k,a}(t) - \Delta_k.$$

Тогда

$$0 \le f(t) - \phi_{k,a}(t) \le 2\Delta_k$$

и очевидно, что

$$\phi_{k,a}(t) \le \phi_{k+1,a}(t).$$

Для заданной функции $f(x) \in H^{\omega}$ и любого натурального числа $n \ge 5$ укажем алгоритм построения функции $\Psi_{n,a}(t)$, для которой справедлива теорема 1. Для этого используем функции $\phi_{k,a}(t)$, определенные для заданной функции $f(t)$, числа $a \in [1; \pi]$ и индекса k. Для простоты вместо $\phi_{k,a}(t)$ используем обозначение $\phi_k(t)$, а вместо $\Psi_{n,a}(t)$ — обозначение $\Psi(t)$.

Положим на отрезке $\left[x_{-1}, x_1\right]$ $\Psi(t) = \phi_1(t)$ и определим сначала функцию $\Psi(t)$ на полуинтервале $(x_1; 1]$. Аналогично будет строиться функция $\Psi(t)$ на полуинтервале $[-1; x_{-1})$.

В зависимости от ситуации будем определять функцию $\Psi(t)$ на отрезке $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ или отрезке $\left[x_k, x_{k+m}\right]$, считая, что она уже задана на отрезке $\left[0, x_k\right]$ так, что $\Psi(x_k) = \phi_k(x_k)$. Если $k = N-1$, то на отрезке $\left[x_{N-1}, 1\right]$ положим $\Psi(t) = \phi_{N-1}(t)$. Если $1 \le k \le N-2$, рассмотрим на отрезке $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ две функции: $\phi_k(t)$ и $\phi_{k+1}(t)$. Если эти функции в некоторых точках этого отрезка принимают равные значения и x^* — самая левая из них, то положим

$$\Psi(t) = \begin{cases} \phi_k(t), & x_k \le t \le x^*; \\ \phi_{k+1}(t), & x^* \le t \le x_{k+1}. \end{cases}$$

Очевидно, что для $\Psi(t)$ на отрезке $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ справедлива теорема 1 и $\Psi(x_{k+1}) = \phi_{k+1}(x_{k+1})$. Для случая, когда графики этих функций не соприкасаются, рассмотрим две возможности.

1. $\phi_k(t) < \phi_{k+1}(t)$ на отрезке $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ и график линейной функции $l_{k,0}(t) = \phi_k(x_k) + M_{k+1}(t - x_k)$ пересекает график функции $\phi_{k+1}(t)$ на этом отрезке. Положим

$$\Psi(t) = \min\left\{l_{k,0}(t), \phi_{k+1}(t)\right\} \le \phi_{k+1}(t).$$

Очевидно, что $\left|\Psi'(t)\right| \le M_{k+1}$, $t \in \left[x_k, x_{k+1}\right]$, $0 \le f(x) - \Psi(t) \le f(t) - \Phi_k(t) \le \le 2\Delta_k$, так как $\Psi(t) \ge \phi_k(t)$, $t \in \left[x_k, x_{k+1}\right]$.

2. $\phi_k(t) < \phi_{k+1}(t)$ на отрезке $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ и графики функций $l_{k,0}(t)$ и $\phi_{k+1}(t)$ не пересекаются на этом отрезке. Рассмотрим вспомогательную функцию $z_k(t)$, которая на отрезках $\left[x_{k+j}, x_{k+j+1}\right]$, $k = 0, 1, \ldots, N-k-1$, равна

$$l_{k,j} = \phi_k(x_k) + \sum_{i=1}^{j} M_{k+i}(x_{k+i} - x_{k+i-1}) + M_{k+j+1}(t - x_{k+j}).$$

Предположим, что на отрезках $\left[x_{k+j}, x_{k+j+1}\right]$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, графики функций $\phi_{k+j+1}(t)$ и $z_k(t)$ не пересекаются, а на отрезке $\left[x_{k+m}, x_{k+m+1}\right]$, если $x_{k+m} < 1$, эти функции принимают в некоторых точках равные значения. Тогда на отрезке $\left[x_k, x_{k+m}\right]$ положим $\Psi(t) = z_k(t)$, а на отрезке $\left[x_{k+m}, x_{k+m+1}\right]$

$$\Psi(t) = \min\left\{z_k(t), \phi_{k+m+1}(t)\right\}.$$

Если $x_{k+m} = 1$, то на отрезке $\left[x_k, 1\right]$ функция $\Psi(t) = z_k(t)$. Очевидно, что $\left|\Psi'(t)\right| \le M_{k+j+1}$, если $t \in \left[x_{k+j}, x_{k+j+1}\right]$, $1 \le j \le m$, и $\Psi(t) \le f(t)$.

Оценим сначала разность $f(t)-\Psi(t)$ на отрезках $\left[x_{k+j}, x_{k+j+1}\right]$, $1 \leq j \leq m-1$, представляя ее в виде

$$f(t)-\Psi(t) = f(t)-\phi_k(t)+\phi_k(t)-\Psi(t) \leq 2\Delta_k+\phi_k(x_k)+M_k(t-x_k)-$$
$$-\Psi(t) = 2\Delta_k-\sum_{i=1}^{j}(M_{k+i}-M_k)(x_{k+i}-x_{k+i-1})-(M_{k+j+1}-M_k)(t-x_{k+j}) \leq$$
$$\leq 2\Delta_k-\sum_{i=1}^{j}(M_{k+i}-M_{k+i-1})(x_{k+i}-x_{k+i-1}).$$

Применяя лемму, получаем

$$f(t)-\psi(t) < 2\Delta_k-\sum_{i=1}^{j}2(\Delta_{k+i-1}-\Delta_{k+i}) = 2\Delta_{k+j}, \quad j=0,1,\ldots,m-1.$$

Рассмотрим теперь $f(t)-\Psi(t)$ на отрезке $[x_{k+m}, x_{k+m+1}]$. Если $\Psi(t) = \phi_{k+m+1}(t)$ в некоторой точке t, то $f(t)-\Psi(t) \leq 2\Delta_{k+m+1}$. Если же $\Psi(t) = z_k(t)$, то, так же, как на отрезке $\left[x_{k+j}, x_{k+j+1}\right]$ при $j=0,1,\ldots,m-1$, получаем

$$f(t)-z_k(t) < 2\Delta_{k+m}.$$

Итак, в первом случае $\Psi(x_{k+1}) = \phi_{k+1}(x_{k+1})$, а во втором $\Psi(x_{k+m+1}) = \phi_{k+m+1}(x_{k+m+1})$, если $x_{k+m} \leq x_{N-1}$. Если $x_{k+m}=1$, то построение функции $\Psi(t)$ на отрезке $[0;1]$ заканчивается. Поскольку отрезков конечное число, то указанный алгоритм приводит к доказательству теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается теорема о приближении сверху.

Теорема 2. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. Тогда для любой функции $f \in H^\omega$ и любого числа $a \in [1;\pi]$ существует последовательность абсолютно непрерывных функций $\left\{\Psi_{n,a}(f;x)\right\}$ таких, что:*

1) *почти всюду выполняется неравенство*

$$\left|\Psi'_{n,a}(f;x)\right| \leq M_{k+1}, \quad x \in E_k, \quad k=0,1,\ldots,N-1;$$

2) *имеет место оценка поточечного приближения функции $f(x)$ сверху*

$$0 \leq \Psi_{n,a}(f;x)-f(x) \leq 2\Delta_k, \quad x \in E_k, \quad k=0,1,\ldots,N-1.$$

1. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**. – С. 748 – 751.
2. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**. – С. 29 – 44.
3. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на отрезке // Докл. АН СССР. – 1966. – **166**, № 2. – С. 281 – 283.
4. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 4. – С. 441 – 447.
5. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами //. Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 328 – 340.
6. *Лигун А. А.* О наилучшем приближении многочленами дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 4. – С. 53 – 60.
7. *Покровский А. В.* Об одной теореме А. Ф. Тимана // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – **1**, № 3. – С. 93 – 94.

Получено 21.03.2002