УДК 517.5

К. М. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Волин. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЇХ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

We obtain the exact values and asymptotic decompositions of the upper bounds of approximations on classes of periodic differentiable functions by Poisson biharmonic integrals.

Отримано точні значення і асимптотичні розклади верхніх меж наближень на класах періодичних диференційовних функцій бігармонійними інтегралами Пуассона.

Нехай f — 2π-періодична сумовна на $[-\pi, \pi]$ функція. Функція

$$P_\rho(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right]\rho^k \cos kt\right\}dt, \qquad 0 \le \rho < 1,\ -\pi \le x < \pi,$$

називається бігармонійним інтегралом Пуассона функції f.

Нехай W^r, $r \in N$, — множина 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R} |f^r(x)| \le 1$; $\overline{W}^r$ — клас функцій, спряжених до функцій із класу W^r, тобто

$$\overline{W}^r = \left\{\bar{f} : \bar{f}(x) := -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt,\ f \in W^r\right\}. \tag{1}$$

Позначимо

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}, P_\rho)_C = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f(x) - P_\rho(f, x)\|_C, \qquad 0 \le \rho < 1, \tag{2}$$

де $\|f\|_C = \max_{t\in R} |f(t)|$.

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $g(\rho) = g(\mathfrak{N}; \rho)$ таку, що при $\rho \to 1-$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}, P_\rho)_C = g(\rho) + o(g(\rho)),$$

то, наслідуючи О. І. Степанця [1, с. 67, 68], будемо говорити, що розв'язана задача Колмогорова – Нікольського для даного класу $\mathfrak{N}$ і наближаючого агрегату P_ρ.

Формальний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$ називається (див., наприклад, [2, с. 21]) асимптотичним розкладом функції $f(\rho)$ при $\rho \to 1-$, якщо при всіх n

$$|g_{n+1}(\rho)| = o(|g_n(\rho)|)$$

і при будь-якому натуральному N

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{N} g_n(\rho) + o(g_N(\rho)), \qquad \rho \to 1-.$$

Коротко будемо записувати цей факт таким чином:

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

Величини (2) або подібні до них $\Big($коли замість $P_\rho(f, x)$ розглядався гармонійний інтеграл Пуассона $A_\rho(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right\}dt$ $\Big)$ вивчались у роботах О. Ф. Тімана [3], B. Szökefalvi-Nagy [4], С. Канієва [5], Е. Л. Штарка [6], авторів [7 – 9], Л. П. Фалалеєва [10] та інших.

Метою даної роботи є знаходження точного значення величини (2) при $\mathfrak{N} = \overline{W}^r$, $r \in N\setminus\{1\}$, та асимптотичного розкладу цієї величини при $\mathfrak{N} = W^r$ і $\mathfrak{N} = \overline{W}^r$, $r \in N\setminus\{1\}$.

Теорема 1. *Для довільних* $l \in N$ *і* $0 < \rho < 1$ *мають місце рівності*

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^{2l}, P_\rho\right)_C = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{(2i-1)!} K_{2(l-i)+1} \ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{(2i)!} \bar{K}_{2(l-i)} \ln^{2i}\frac{1}{\rho} +$$
$$+ \frac{1-\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{(2i-1)!} \bar{K}_{2(l-i)} \ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{(2i)!} K_{2(l-i)-1} \ln^{2i}\frac{1}{\rho}\right] -$$
$$- \varepsilon_\rho^{2l} + \frac{1-\rho^2}{2}\varepsilon_\rho^{2l-1}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_\rho^r = \frac{2}{\pi}\int_\rho^1\int_{t_r}^1 \ldots \int_{t_2}^1 \frac{1}{t_1\ldots t_r} \ln\frac{1+t_1}{1-t_1}\, dt_1\ldots dt_r;$$

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^{2l+1}, P_\rho\right)_C = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{(2i-1)!} K_{2(l-i)+2} \ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{(2i)!} \bar{K}_{2(l-i)+1} \ln^{2i}\frac{1}{\rho} +$$
$$+ \frac{1-\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{(2i-1)!} \bar{K}_{2(l-i)+1} \ln^{2i-1}\frac{1}{\rho} - \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{(2i)!} K_{2(l-i)} \ln^{2i}\frac{1}{\rho}\right] +$$
$$+ \delta_\rho^{2l+1} - \frac{1-\rho^2}{2}\delta_\rho^{2l}, \tag{4}$$

$$\delta_\rho^r = \frac{4}{\pi}\int_\rho^1\int_{t_r}^1 \ldots \int_{t_2}^1 \frac{1}{t_1\ldots t_r} \operatorname{arctg} t_1 dt_1\ldots dt_r,$$

де K_n *і* $\bar{K}_n$ *— константи Ахієзера – Крейна – Фавара*:

$$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \bar{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n \in N.$$

При доведенні теореми використовується схема доведення теорем 1, 2 роботи [9].

Враховуючи інтегральне зображення (1) і те, що при $f \in W^r$, $r \in N\setminus\{1\}$,

$$P_\rho(\bar{f}, \varphi) = \overline{P}_\rho(f, \varphi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\sum_{k=1}^{\infty}\left[1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right]\rho^k \sin kt dt,$$

після застосування r-кратного інтегрування за частинами отримуємо

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r, P_\rho\right)_C = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^r}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\overline{V}_r(\rho, t)\, dt\right|, \tag{5}$$

де

$$\overline{V}_r(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right]\rho^k}{k^r} \cos\left(kt + \frac{(r+1)\pi}{2}\right), \qquad 0 \le \rho < 1.$$

Якщо при $l \in N$ будуть встановлені рівності

$$\operatorname{sign}\overline{V}_{2l}(\rho, t) = \pm\operatorname{sign}\sin t, \tag{6}$$

$$\operatorname{sign}\Big(\overline{V}_{2l+1}(\rho,t)-\overline{V}_{2l+1}\Big(\rho,\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \pm\operatorname{sign}\cos t, \tag{7}$$

то з (5) одержимо

$$\mathscr{E}\big(\overline{W}^r, P_\rho\big)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{kr}\,\frac{1-\Big[1+\frac{2k+1}{2}(1-\rho^2)\Big]\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{8}$$

Щоб довести (6) і (7), покажемо спочатку, що

$$\overline{V}_2(\rho,t) = \sum_{k=1}^{\infty}c_k\sin kt>0, \qquad c_k:=\frac{1-\Big[1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\Big]\rho^k}{k^2},$$

при $t\in(0,\pi)$ і $0\le\rho<1$. Для цього дослідимо послідовність коефіцієнтів c_k розкладу цього ядра. Оскільки

$$\Delta c_k = c_k-c_{k+1} = \frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{\rho^k}{k^2}+\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)^2}-\frac{1-\rho^2}{2}\left(\frac{\rho^k}{k}-\frac{\rho^{k+1}}{k+1}\right) =:\xi_k(\rho)$$

і $\xi_k(0)>0,\ \xi_k(1)=0,$

$$\xi'(\rho) = (1-\rho^2)\rho^{k-1}\left(\frac{\rho}{k+1}-\frac{1}{k}+\frac{\rho-1}{2}\right) < 0, \quad 0\le\rho<1, \quad k=1,2,\ldots,$$

то $\Delta c_k>0$ для довільних $k\in N$ і $0\le\rho<1$. З того, що

$$\Delta^2 c_k = c_k-2c_{k+1}+c_{k+2} =$$

$$= \frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+2)^2}-\frac{2}{(k+1)^2}-\frac{\rho^k}{k^2}-\frac{\rho^{k+2}}{(k+2)^2}+\frac{2\rho^{k+1}}{(k+1)^2}-$$

$$-\frac{1-\rho^2}{2}\left(\frac{\rho^k}{k}+\frac{\rho^{k+2}}{k+2}-\frac{2\rho^{k+1}}{k+1}\right) =:\eta_k(\rho)$$

і для довільного $k\in N$

$$\eta_k(0)>0, \quad \eta_k(1)=0,$$

$$\eta_k'(\rho) = (1-\rho^2)\rho^{k-1}\left(-\frac{\rho^2}{k+2}-\frac{1}{k}+\frac{2\rho}{k+1}-\frac{(1-\rho)^2}{2}\right) < 0, \quad 0\le\rho<1,$$

випливає, що $\Delta^2 c_k>0$ при всіх $k\in N$ і $0\le\rho<1$. Оскільки коефіцієнти c_k ядра $\overline{V}_2(t)=\overline{V}_2(\rho,t)$ додатні, двічі монотонно прямують до нуля ($\Delta c_k>0$, $\Delta^2 c_k>$ >0) і, крім того, як неважко переконатися, задовольняють умову $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k}<\infty$, то згідно з [11, с. 297, 298] $\overline{V}_2(\rho,t)>0$ при $t\in(0,\pi)$ і $0\le\rho<1$.

Очевидно, що при $l\in N$ $\overline{V}_{2l}(\rho,0)=\overline{V}_{2l}(\rho,\pi)=0$, а отже, в припущенні, що $\overline{V}_{2l}(\rho,t)=0$ ще при деякому $t_0\in(0,\pi)$, застосовуючи $2l-2$ рази теорему Ролля, приходимо до висновку, що для функції $\overline{V}_2(\rho,t)$ існує $t_{2l-2}\in(0,\pi)$ таке, що $\overline{V}_2(\rho,t_{2l-2})=0$. Але це, як доведено вище, неможливо. Отже, рівність (6) має місце. Далі, якщо припустити, що $\overline{V}_{2l+1}(\rho,t_0)-\overline{V}_{2l+1}\Big(\rho,\frac{\pi}{2}\Big)=0$, $t_0\in(0,\pi)$, $t_0\neq\frac{\pi}{2}$, то згідно з теоремою Ролля існує $t_1\in(0,\pi)$ таке, що

$\overline{V}'_{2l+1}(\rho, t_1) = 0$, звідки $\overline{V}'_{2l}(\rho, t_1) = 0$. Але це в силу (6) неможливо. Рівність (7) доведено.

Таким чином, виходячи із співвідношення (8), одержуємо

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}^r, P_\rho\right)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{kr}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} - \frac{2(1-\rho^2)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{kr}\frac{1}{(2k+1)^r} + {}$$

$$+ \frac{2(1-\rho^2)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{kr}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^r}. \tag{9}$$

Звідси, враховуючи, що для функцій

$$\varphi_n(\rho) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}},$$

$$\psi_n(\rho) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}}$$

виконуються співвідношення

$$\varphi_n(\rho) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\varphi_{n-k}(0)\ln^k\frac{1}{\rho} + (-1)^{n-1}\varepsilon_\rho^n,$$

$$\psi_n(\rho) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{n-k}(0)\ln^k\frac{1}{\rho} + (-1)^{n-1}\delta_\rho^n$$

(див. [3, с. 20]), одержуємо твердження теореми 1.

Зауваження. **1.** Відмітимо, що в силу (8)

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}^r, P_0\right)_C = \tilde{K}_r, \quad r = 2, 3, \ldots .$$

2. Враховуючи, що при $\rho \to 1-$

$$\delta_\rho^r = O((1-\rho)^r), \quad \varepsilon_\rho^r = O\left((1-\rho)^r \ln\frac{1}{1-\rho}\right) \tag{10}$$

(див. [3, с. 18]), згідно з теоремою 1 при $\rho \to 1-$ маємо

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}^2, P_\rho\right)_C = O\left((1-\rho)^2 \ln\frac{1}{1-\rho}\right), \tag{11}$$

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}^r, P_\rho\right)_C = \left(K_{r-1} + \frac{\tilde{K}_{r-2}}{2}\right)(1-\rho)^2 + O\left((1-\rho)^3 \ln\frac{1}{1-\rho}\right), \quad r = 3, 4, \ldots . \tag{12}$$

Порівнюючи (11), (12) із отриманими в [9] оцінками

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}^r, A_\rho\right)_C = K_{r-1}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln\frac{1}{1-\rho}\right), \tag{13}$$

де A_ρ — гармонійний інтеграл Пуассона, бачимо, що при $r \in N\setminus\{1\}$ і $\rho \to 1-$ праві частини у (11) і (12) за порядком менші, ніж у (13).

З урахуванням (10) і того, що $\ln\frac{1}{\rho} \sim (1-\rho)$ при $\rho \to 1-$, рівності (3) при $r = 2l$ і (4) при $r = 2l+1$ дозволяють виділити лише перші $r-1$ члени асимптотики з відповідними константами (константами Колмогорова – Нікольського). Наступні теореми містять асимптотичні розклади величин (2) при $\mathfrak{N} = W^r$ і $\mathfrak{N} =$

$= \overline{W}^r$, які дають можливість обчислювати константи Колмогорова–Нікольського, що відповідають асимптотичним доданкам як-завгодно великого степеня мализни. Для доведення цих теорем будуть необхідні наступні леми із роботи [8] (з технічних не залежних від авторів причин при їх формулюванні у [8] допущено описки).

Лема 1. *Для функцій* $\varphi_n(\rho) = \int_\rho^1 \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} \frac{1}{t_1 \ldots t_n} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 \ldots dt_n$, $n \in N$, *справедливий асимптотичний розклад*

$$\varphi_n(\rho) \cong \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k^n (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \beta_k^n (1-\rho)^k \right\},$$

де

$$\alpha_k^n = \frac{(-1)^k}{k!} a_n^k, \tag{14}$$

$$\beta_k^n = \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{n-i}(0) a_i^k + a_n^k \left(\ln 2 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \right) + S_k^n \right\}, \tag{15}$$

$$S_k^n = \begin{cases} 0, & k \le n; \\ \sum_{i=n+1}^{k} \frac{a_i^k}{2^{i-n}} + \sum_{i=1}^{k-n} A_i^{k-1} a_n^{k-i}, & k > n, \end{cases}$$

$$a_i^j = \begin{cases} 0, & i > j; \\ (-1)^j (j-1)!, & i = 1; \\ a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1}(j-1), & i \le j \le n; \\ a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1}(j-2), & n+1 = i \le j; \\ -(i-n-1) a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1}(j-i+n-1), & n+1 < i \le j, \end{cases}$$

$$A_k^n = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k}, \qquad \varphi_n(0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} K_n, & n \text{ — непарне}; \\ \frac{\pi}{2} \tilde{K}_n, & n \text{ — парне}. \end{cases}$$

Лема 2. *Для функцій* $\psi_n(\rho) = \int_\rho^1 \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 \ldots t_n} dt_1 \ldots dt_n$, $n \in N$, *справедливий асимптотичний розклад*

$$\psi_n(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^n (1-\rho)^k,$$

де при $k \in N$

$$\gamma_k^n = \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \psi_{n-i}(0) b_i^k + \sigma_k^n \right\}, \tag{16}$$

$$\psi_n(0) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} K_n, & n \text{ — парне}; \\ \frac{\pi}{4} \tilde{K}_n, & n \text{ — непарне}, \end{cases} \qquad \sigma_k^n = \begin{cases} 0, & k \le n; \\ \sum_{i=n+1}^{k} \frac{b_i^k}{2^{i-n}}, & k > n, \end{cases}$$

$$b_i^j = \begin{cases} 0, & i > j; \\ (-1)^j (j-1)!, & i = 1; \\ b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-1), & i \le j \le n; \\ b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-2), & n+1 = i \le j; \\ -2(i-n-1) b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-2i+2n), & n+1 < i \le j. \end{cases}$$

Теорема 2. *Мають місце асимптотичні розклади*

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}^2, P_\rho\right)_C \cong \frac{1}{\pi}(1-\rho)^2 \ln\frac{1}{1-\rho} + \left(K_1 + \frac{\ln 2}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\right)(1-\rho)^2 +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\left[\alpha_k^2 + \alpha_{k-1}^1 - \frac{1}{2}\alpha_{k-2}^1\right](1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \left[\beta_k^2 + \beta_{k-1}^1 - \frac{1}{2}\beta_{k-2}^1\right](1-\rho)^k\right\},$$

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}^r, P_\rho\right)_C \cong \left(K_{r-1} + \frac{1}{2}\tilde{K}_{r-2}\right)(1-\rho)^2 +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\left[\alpha_k^r + \alpha_{k-1}^{r-1} - \frac{1}{2}\alpha_{k-2}^{r-1}\right](1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} +\right.$$

$$\left. + \left[\beta_k^r + \beta_{k-1}^{r-1} - \frac{1}{2}\beta_{k-2}^{r-1}\right](1-\rho)^k\right\}, \quad r = 2l+2, \quad l \in N,$$

$$\mathscr{E}\left(\overline{W}^r, P_\rho\right)_C \cong \left(K_{r-1} + \frac{1}{2}\tilde{K}_{r-2}\right)(1-\rho)^2 +$$

$$+ \frac{4}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left[\gamma_k^r + \gamma_{k-1}^{r-1} - \frac{1}{2}\gamma_{k-2}^{r-1}\right](1-\rho)^k, \quad r = 2l+1, \quad l \in N,$$

де коефіцієнти α_k^r, β_k^r *і* γ_k^r *обчислюються відповідно за допомогою формул* (14), (15) *і* (16).

Справедливість теореми 2 випливає із (9), лем 1, 2 та співвідношень

$$\int_\rho^1\int_0^{t_n}\ldots\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1\ldots t_n}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1\ldots dt_n = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}}, \tag{17}$$

$$\int_\rho^1\int_0^{t_n}\ldots\int_0^{t_2}\frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1\ldots t_n}dt_1\ldots dt_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}}. \tag{18}$$

Теорема 3. *Мають місце асимптотичні розклади*

$$\mathscr{E}(W^r, P_\rho)_C \cong \left(\tilde{K}_{r-1} + \frac{1}{2}K_{r-2}\right)(1-\rho)^2 +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left\{\left[\alpha_k^r + \alpha_{k-1}^{r-1} - \frac{1}{2}\alpha_{k-2}^{r-1}\right](1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} +\right.$$

$$\left. + \left[\beta_k^r + \beta_{k-1}^{r-1} - \frac{1}{2}\beta_{k-2}^{r-1}\right](1-\rho)^k\right\}, \quad r = 2l+1, \quad l \in N, \tag{19}$$

$$\mathscr{E}(W^r, P_\rho)_C \cong \left(\tilde{K}_{r-1} + \frac{1}{2}K_{r-2}\right)(1-\rho)^2 +$$

$$+ \frac{4}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\left[\gamma_k^r + \gamma_{k-1}^{r-1} - \frac{1}{2}\gamma_{k-2}^{r-1}\right](1-\rho)^k, \quad r = 2l, \quad l \in N, \tag{20}$$

де коефіцієнти α_k^r, β_k^r *і* γ_k^r *обчислюються відповідно за допомогою формул* (14), (15) *і* (16).

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що

$$\mathscr{E}(W^r, P_\rho)_C = \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W^r} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) V_r(\rho, t)\, dt \right|,$$

де $$V_r(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \left[1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right]\rho^k}{k^r} \cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right),$$ і, крім того,

$$\operatorname{sign} V_r(\rho, t) = \pm \operatorname{sign} \sin t \quad \text{при} \quad r = 2l + 1$$

і

$$\operatorname{sign}\left(V_r(\rho, t) - V_r\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \pm \operatorname{sign} \cos t \quad \text{при} \quad r = 2l.$$

Тому при $r \geq 2$

$$\mathscr{E}(W^r, P_\rho)_C = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(r+1)} \frac{1 - \left[1 + \frac{2k+1}{2}(1-\rho^2)\right]\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(r+1)} \frac{1 - \rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} - \frac{2(1-\rho^2)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(r+1)} \frac{1}{(2k+1)^r} +$$

$$+ \frac{2(1-\rho^2)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(r+1)} \frac{1 - \rho^{2k+1}}{(2k+1)^r}. \qquad (21)$$

Враховуючи (17) і (18), леми 1 і 2, із (21) отримуємо асимптотичні розклади (19) і (20). Теорему 3 доведено.

Відмітимо, що асимптотичні розклади верхніх меж наближень на класі диференційовних функцій W^1 їх гармонійними інтегралами Пуассона було отримано в роботі [6], а на класах W^r, $r \in N \setminus \{1\}$, і $\overline{W}^r$, $r \in N$, — у роботі [8]. Асимптотичний розклад величини $\mathscr{E}(W^1, P_\rho)_C$ отримано в роботі [7].

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.
3. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **74**. – С. 17–20.
4. *Szökefalvi-Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta math. Acad. sci. hung. – 1950. – **1**. – P. 183–188.
5. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в округе функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995–998.
6. *Штарк Э. Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от их сингулярного интеграла Абеля–Пуассона // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 1. – С. 21–28.
7. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Про наближення функцій класу Гельдера бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 971–974.
8. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Там же. – 2002. – **54**, № 1. – С. 43–52.
9. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх інтегралами Пуассона // Допов. НАН України. – 2002. – № 5. – С. 18–23.
10. *Фалалеев Л. П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля–Пуассона // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 4. – С. 926–936.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Одержано 26.02.2002