УДК 517.928

І. І. Старун (Ніжин. пед. ун-т),
М. І. Шкіль (Нац. пед. ун-т, Київ)

ЛІНІЙНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ СИСТЕМИ

We investigate solvability of the Cauchy problem for a linear singularly perturbed homogeneous system in the case of singular bundle of matrices.

Досліджується розв'язність задачі Коші для лінійної сингулярно збуреної однорідної системи у випадку сингулярної в'язки матриць.

1. У даній роботі розглядається система

$$\varepsilon B(t)\dot{x} = (A_0(t) + \varepsilon A_1(t))x, \tag{1}$$

в якій $(n\times n)$-вимірні матриці мають необхідний ступінь гладкості, в'язка

$$A_0(t) - \lambda B(t) \tag{2}$$

сингулярна, її мінімальні індекси рядків та стовпців зберігають на $[0, T]$ сталу кратність, а „скінченних" та „нескінченних" елементарних дільників немає [1]. Тоді, як показано в [2], існує пара неособливих матриць $P(t)$, $Q(t)$, яка приводить в'язку (2) до канонічної форми

$$P(t)(A_0(t) - \lambda B(t))Q(t) = M - \lambda N, \tag{3}$$

де

$$N = \operatorname{diag}\left\{0, L_{1\gamma_1}, \ldots, L_{1\gamma_r}, L'_{1\eta_1}, \ldots, L'_{1\eta_s}\right\},$$

$$M = \operatorname{diag}\left\{0, L_{2\gamma_1}, \ldots, L_{2\gamma_r}, L'_{2\eta_1}, \ldots, L'_{2\eta_s}\right\},$$

$$L_{1\gamma_i} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\gamma_i+1}\right\}\gamma_i, \qquad L_{2\gamma_i} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\gamma_i+1}\right\}\gamma_i,$$

$$L'_{1\eta_j} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\eta_j}\right\}\eta_{j+1}, \qquad L'_{2\eta_j} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{\eta_j}\right\}\eta_{j+1},$$

0 — нульова $(h\times h)$-вимірна матриця.

Таким чином, розглядається випадок, коли в'язка (3) не містить регулярне ядро.

З метою спрощення викладок розглянемо випадок, коли матриці M та N мають таку структуру:

$$M = \operatorname{diag}\left\{0, L_{2\gamma}, L'_{2\eta}\right\}, \qquad N = \operatorname{diag}\left\{0, L_{1\gamma}, L'_{1\eta}\right\}. \tag{4}$$

Варто зауважити, що системи вигляду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon),$$
$$B(t,\varepsilon) = \sum_{s\geq 0}\varepsilon^s B_s(t), \qquad A(t,\varepsilon) = \sum_{s\geq 0}\varepsilon^s A_s(t), \tag{5}$$

розглядалися в багатьох роботах, але випадок, коли матриця $B_0(t)$ особлива, вперше було розглянуто в роботах одного з авторів [3, 4], де запропоновано застосувати при побудові асимптотичних розв'язків теорію в'язок матриць з [1]. Пізніше система (5) була предметом дослідження в роботах авторів даної статті (див., наприклад, [5–7]), В. П. Яковця [8, 9], Г. С. Жукової [10] та інших. У більшості випадків дослідження проводилися при умові, що в'язка $A_0(t)-\lambda B_0(t)$ є регулярною. В [8, 9, 11] проведено детальне дослідження системи (5) і у випадку сингулярної в'язки $A_0(t)-\lambda B_0(t)$ при умові, що матриця $B(t,\varepsilon)$ не тотожно вироджена

$$\left(\det B_0(t) = \det B_1(t) = \ldots = \det B_k(t) \equiv 0, \quad \det\left(\sum_{s\geq k+1}\varepsilon^s B_s(t)\right)\neq 0 \ \text{ при } \ \varepsilon>0\right).$$

У цій роботі розглядається випадок сингулярної в'язки (2), тобто

$$\det B(t) \equiv 0, \qquad \det\,(A_0(t)-\lambda B(t)) \equiv 0.$$

Для системи (1) задамо початкові умови

$$x(0,\varepsilon) = a \tag{6}$$

і виясним, коли задача (1), (6) має розв'язок, та вкажемо як його знайти. Все це проілюструємо на конкретному прикладі системи четвертого порядку.

2. Виконавши в (1) заміну

$$x = Q(t)y \tag{7}$$

та помноживши зліва на $P(t)$ ($P(t)$, $Q(t)$ — матриці з (3)), одержимо систему

$$\varepsilon N\dot{y} = (M+\varepsilon C(t))y, \tag{8}$$

де $C(t) = P(t)(A_1(t)Q(t) - B(t)\dot{Q}(t))$.

Згідно зі структурою матриць M і N з (4) система (8) розпадається на дві підсистеми:

$$\begin{cases} c_{11}(t)y_1 + \ldots + c_{1n}(t)y_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{h1}(t)y_1 + \ldots + c_{hn}(t)y_n = 0, \\ \varepsilon c_{n1}(t)y_1 + \ldots + (\varepsilon c_{nn}(t)+1)y_n = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{y}_{h+1} = y_{h+2} + \varepsilon(c_{h+11}(t)y_1 + \ldots + c_{h+1n}(t)y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon\dot{y}_{h+\gamma} = y_{h+\gamma+1} + \varepsilon(c_{h+\gamma 1}(t)y_1 + \ldots + c_{h+\gamma n}(t)y_n), \\ \varepsilon\dot{y}_{h+\gamma+2} = \varepsilon(c_{h+\gamma+11}(t)y_1 + \ldots + c_{h+\gamma+1n}(t)y_n), \\ \varepsilon\dot{y}_{h+\gamma+3} = y_{h+\gamma+2} + \varepsilon(c_{h+\gamma+21}(t)y_1 + \ldots + c_{h+\gamma+2n}(t)y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon\dot{y}_n = y_{n-1} + \varepsilon(c_{n-11}(t)y_1 + \ldots + c_{n-1n}(t)y_n). \end{cases} \tag{10}$$

Випадок А. Нехай визначник

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1h}(t) & c_{1\,h+\gamma+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{h1}(t) & \dots & c_{hh}(t) & c_{h\,h+\gamma+1}(t) \\ c_{n1}(t) & \dots & c_{nh}(t) & c_{n\,h+\gamma+1}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{11}$$

при будь-якому $t \in [0, T]$. Тоді з системи (9) функції $y_1, \dots, y_h, y_{h+\gamma+1}$ лінійно і однозначно виразяться через $y_{h+1}, \dots, y_{h+\gamma}, y_{h+\gamma+2}, \dots, y_n$. Підставивши їх у (10) та ввівши в розгляд вектор $u = \operatorname{colon}(y_{h+1}, \dots, y_{h+\gamma}, y_{h+\gamma+2}, \dots, y_n)$, отримаємо систему вигляду

$$\varepsilon^2 \dot{u} = \Phi(t, \varepsilon) u = (\Phi_0(t) + \varepsilon \Phi_1(t) + \varepsilon^2 \Phi_2(t)) u, \tag{12}$$

розв'язки якої будуються методами з [2, 11].

Випадок Б. $\det \Delta(t) \equiv 0$, а ранг матриці

$$L = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1h}(t) & c_{1\,h+\gamma+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{h1}(t) & \dots & c_{hh}(t) & c_{h\,h+\gamma+1}(t) \\ c_{n1}(t) & \dots & c_{nh}(t) & c_{n\,h+\gamma+1}(t) \end{pmatrix} \tag{13}$$

дорівнює r, $1 \leq r < h$. Припустимо, що в матриці L відмінним від нуля є мінор r-го порядку, що стоїть в її лівому верхньому куті. Тоді в системі (9) $h + 1 - r$ функцій $y_{r+1}, \dots, y_h, y_{h+\gamma+1}$ є довільними, а $y_1, \dots, y_r$ лінійно виражаються через них. Поклавши $y_{r+1} = \alpha_1(t), \dots, y_{h+\gamma+1} = \alpha_{h+1-r}(t)$, визначивши $y_1, \dots, y_r$ з (9) та підставивши в (10), одержимо неоднорідну систему типу

$$\varepsilon^2 \dot{u} = \Phi(t, \varepsilon) u + f(t, \varepsilon), \tag{14}$$

розв'язок якої теж можна знайти методами з [2, 11], причому цей розв'язок буде залежати від довільних функцій $\alpha_k(t)$, $k = \overline{1, h+1-r}$.

3. Розглянемо тепер задачу (1), (6). Заміна (7) переводить початкові умови (6) в початкові умови

$$y(0, \varepsilon) = Q^{-1}(0) a \equiv b \tag{15}$$

для системи (8), а тому маємо задачу (8), (15). Для того щоб ця задача мала розв'язок, необхідно, щоб вектор (15) задовольняв умови (9) при $t = 0$. З викладеного вище випливає, що якщо $\det \Delta(0) \neq 0$ (це умова (11)), то довільними є $n - h - 1$ компонент вектора b, а саме $b_{h+1}, \dots, b_{h+\gamma}, b_{h+\gamma+2}, \dots, b_n$, в той час як перші $h + 1$ компонент виражаються через довільні з системи (9) при $t = 0$. У випадку Б довільними є $n - r$ компонент вектора b, а перші r визначаються через них з (9).

4. Як приклад розглянемо систему (1), в якій

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_1^4.$$

Матриці P, Q, M, N у даному випадку будуть такими:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а системи (9), (10) наберуть вигляду (аргумент t пропущено)

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 + c_{14}y_4 = 0, \\ \varepsilon c_{41}y_1 + \varepsilon c_{42}y_2 + \varepsilon c_{43}y_3 + (\varepsilon c_{44} + 1)\, y_4 = 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{y}_2 = y_3 + \varepsilon c_{21}y_1 + \varepsilon c_{22}y_2 + \varepsilon c_{23}y_3 + \varepsilon c_{24}y_4, \\ \varepsilon \dot{y}_4 = \varepsilon c_{31}y_1 + \varepsilon c_{32}y_2 + \varepsilon c_{33}y_3 + (\varepsilon c_{44} + 1)\, y_4. \end{cases} \tag{17}$$

Нехай

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{41} & c_{43} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді з (16) однозначно знаходимо

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{12}y_2 + \alpha_{14}y_4 + \frac{1}{\varepsilon}\beta_{14}y_n, \\ y_3 &= \alpha_{32}y_2 + \alpha_{34}y_4 + \frac{1}{\varepsilon}\beta_{34}y_n, \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\alpha_{12} = \frac{1}{\Delta}(c_{13}c_{42} - c_{12}c_{43}), \qquad \alpha_{14} = \frac{1}{\Delta}(c_{13}c_{44} - c_{14}c_{43}),$$

$$\alpha_{32} = \frac{1}{\Delta}(c_{12}c_{41} - c_{11}c_{42}), \qquad \alpha_{34} = \frac{1}{\Delta}(c_{14}c_{41} - c_{11}c_{44}),$$

$$\beta_{14} = -\frac{1}{\Delta}c_{13}, \qquad \beta_{34} = -\frac{1}{\Delta}c_{11}.$$

Підставивши (18) в (17), матимемо систему

$$\varepsilon^2 \dot{u} = \left(\begin{pmatrix} 0 & \beta_{34} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} \\ 0 & b_{22}^{(1)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(2)} & \beta_{12}^{(2)} \\ \beta_{21}^{(2)} & \beta_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \right) u, \tag{19}$$

в якій

$$b_{11}^{(1)} = \alpha_{32}, \qquad b_{12}^{(1)} = \alpha_{34} + \beta_{14}c_{21} + \beta_{34}c_{23},$$

$$b_{22}^{(1)} = \beta_{34}c_{33} + \beta_{14}c_{31}, \qquad b_{11}^{(1)} = \alpha_{12}c_{21} + \alpha_{32}c_{23} + c_{22},$$

$$b_{12}^{(1)} = \alpha_{14}c_{21} + \alpha_{34}c_{23}^{(1)} + c_{24}, \qquad b_{21}^{(1)} = \alpha_{12}c_{31} + \alpha_{32}c_{33} + c_{32},$$

$$b_{22}^{(1)} = \alpha_{14}c_{31} + \alpha_{34}c_{33} + c_{44}, \qquad u = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Виконавши у системі (9) згідно з [2] заміну

$$u = L(\varepsilon)v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} v,$$

одержимо систему

$$\varepsilon\dot{v} = (F_0(t) + \varepsilon F_1(t) + \varepsilon^2 F_2(t))v, \tag{20}$$

в якій

$$F_0(t) = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)}(t) & \beta_{34}(t) \\ \beta_{21}^{(2)}(t) & \beta_{22}^{(1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Якщо корені $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ рівняння

$$\det(F_0(t) - \lambda E) = 0$$

різні і такі, що або $\operatorname{Re}\lambda_1(t) \le 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2(t) \le 0$, або функція $\operatorname{Re}(\lambda_1(t) - \lambda_2(t))$ не змінює свій знак при будь-якому $t \in [0, T]$, то, як показано в [2, 11], загальний асимптотичний розв'язок системи (20) з точністю до $O(\varepsilon^m)$ має вигляд

$$v(t, \varepsilon) = u_m(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(\tau)d\tau\right)c, \tag{21}$$

де

$$u_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s u_s(t) = \left(u_{ij}(t, \varepsilon)\right)_1^2, \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{— довільний вектор.}$$

Тоді, враховуючи, що $u = L(\varepsilon)v$, знаходимо

$$y_2(t, \varepsilon) = v_1(t, \varepsilon) = u_{11}(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau\right)c_1 + u_{12}(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau\right)c_2,$$

$$y_4(t, \varepsilon) = \varepsilon v_2(t, \varepsilon) = \varepsilon u_{21}(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau\right)c_1 + \varepsilon u_{22}(t, \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau\right)c_2,$$

$$y_1(t, \varepsilon) = \alpha_{12}(t)v_1(t, \varepsilon) + (\varepsilon\alpha_{14}(t) + \beta_{14}(t))v_2(t, \varepsilon),$$

$$y_3(t, \varepsilon) = \alpha_{32}(t)v_1(t, \varepsilon) + (\varepsilon\alpha_{34}(t) + \beta_{34}(t))v_2(t, \varepsilon).$$

Початкова задача має розв'язок лише тоді, коли координати вектора $a = Q(0)b$ задовольняють систему

$$\begin{cases} c_{11}(0)b_1 + c_{12}(0)b_2 + c_{13}(0)b_3 + c_{14}(0)b_4 = 0, \\ \varepsilon c_{41}(0)b_1 + \varepsilon c_{42}(0)b_2 + \varepsilon c_{43}(0)b_3 + (\varepsilon c_{44}(0) + 1)b_4 = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Оскільки, за припущенням, $\Delta(0) \ne 0$, то з (22) випливає, що координати b_2, b_4 довільні, а b_1, b_3 виражаються через них згідно з формулами (18) (при $t = 0$). Враховуючи матрицю Q, легко встановити, що початковий вектор a буде допустимим (тобто початкова задача має розв'язок), якщо довільними в ньому є перша та четверта компоненти (тоді і b_2 та b_4 довільні), а $a_2 = b_1 + b_2$, $a_3 = -3b_1 + b_3$, де b_1, b_3 — розв'язок системи (22).

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1989. – 287 с.
3. *Старун И. И.* Построение асимптотических решений сингулярно возмущенных линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 10. – С. 1822 – 1823.
4. *Старун И. И.* Построение решений одного класса линейных систем // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 153 – 160.
5. *Старун И. И.* Система с вырожденной матрицей при производной // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1535 – 1537.
6. *Старун І. І., Шкіль М. І.* Побудова розв'язків лінійних та квазілінійних сингулярно збурених систем звичайних диференціальних рівнянь // Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – Київ: Вища шк., 1993. – С. 141 – 157.
7. *Старун І. І., Шкіль М. І.* Інтегрування лінійної сингулярно збуреної системи з виродженням // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1542 – 1548.
8. *Яковец В. П.* Асимптотический анализ сингулярно возмущенной линейной системы с сингулярным предельным пучком матриц // Там же. – 1992. – **44**, № 1. – С. 106 – 122.
9. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 299 с.
10. *Жукова Г. С.* Метод общего анализа линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и систем: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М., 1990. – 296 с.
11. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Выща шк., 1991. – 207 с.

Одержано 02.04.2001