УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА С ИНТЕГРИРУЕМОЙ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

We obtain a new exact Kolmogorov-type inequality

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \leq K \| x \|_2^{\frac{r-k-1/2}{r-1/2}} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{\frac{k}{r-1/2}}$$

for 2π-periodic functions $x \in L_1^r$ and any $k, r \in N$, $k < r$.

We present applications of this inequality to problems of the approximation of one class of functions by other class and estimations of characteristics of K-functional type.

Одержано нову точну нерівність типу Колмогорова

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \leq K \| x \|_2^{\frac{r-k-1/2}{r-1/2}} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{\frac{k}{r-1/2}}$$

для 2π-періодичних функцій $x \in L_1^r$ і довільних $k, r \in N$, $k < r$.

Наведено застосування цієї нерівності в задачах наближення одного класу функцій іншим та оцінки типу K-функціонала.

Пусть L_p, $1 \leq p \leq \infty$, — пространства 2π-периодических функций $x: R \to R$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p$. Для натурального r обозначим через L_p^r класс функций $x \in L_\infty$, имеющих абсолютно непрерывную производную $x^{(r-1)}$ $(x^{(0)} := x)$ и таких, что $x^{(r)} \in L_p$. В работе [1], в частности, доказано (теорема 3.5), что для $k, r \in N$, $r \geq 3$ и $k \in (r/2, r)$ при всех $p \in [1, \infty]$ для функций $x \in L_1^r$ имеют место точные неравенства

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \leq \frac{\| g_{r-k} \|_2}{\| g_r \|_p^{\frac{r-k-1/2}{r-1+1/p}}} \| x \|_p^{\frac{r-k-1/2}{r-1+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{\frac{k-1/2+1/p}{r-1+1/p}}, \tag{1}$$

где

$$g_r(t) = \frac{1}{4} \varphi_{r-1}(t),$$

а $\varphi_r(t)$ — r-й 2π-периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sign} \sin t$.

По поводу других известных неравенств типа Колмогорова для периодических функций см., например, [1, 2].

***Замечания.* 1.** Для $r = 2$, $k = 1$ неравенство (1) содержится в более общем неравенстве, оценивающем $\|x'\|_q$ сверху через $\|x\|_p$ и $\|x''\|_1$ при всех $q, p \in [1, \infty]$ (см. [3], теорема 2).

2. Отметим, что показатель степени

$$\alpha = \frac{r - k - 1/2}{r - 1 + 1/p}$$

при $\|x\|_p$ в этом неравенстве максимально возможный [4] и именно неравенства типа Колмогорова для периодических функций с максимально возможными показателями α при норме функции представляют наибольший интерес для приложений.

В данной статье доказано неравенство (1) в случае $p = 2$ для всех $k = 1, 2, \ldots, r-1$. При этом использован метод, отличный от метода доказательства теоремы 3.5 в [1].

Теорема 1. *Пусть $r, k \in N$, $k < r$. Тогда для любой функции $x \in L_1^r$ имеет место неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le \frac{\|g_{r-k}\|_2}{\|g_r\|_2^{\frac{r-k-1/2}{r-1/2}}} \|x\|_2^{\frac{r-k-1/2}{r-1/2}} \left\|x^{(r)}\right\|_1^{\frac{k}{r-1/2}}. \tag{2}$$

Константа $\|g_{r-k}\|_2 / \|g_r\|_2^{(r-k-1/2)/(r-1/2)}$ в неравенстве (2) неулучшаема.

Доказательство. Для $f \in L_\infty^{2r-1}$ в силу неравенства Колмогорова [5] имеем

$$\left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \le C_{2r-1,2k} \|f\|_\infty^{1-\frac{2k}{2r-1}} \left\|f^{(2r-1)}\right\|_\infty^{\frac{2k}{2r-1}}, \tag{3}$$

где

$$C_{r,k} = \|\varphi_{r-k}\|_\infty / \|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}.$$

Пусть

$$f(t) = (x * x)(t) = \int_0^{2\pi} x(u+t)x(u)\,du.$$

Ясно, что $f \in L_\infty^{2r-1}$, $f^{(2k)}(t) = \left(x^{(k)} * x^{(k)}\right)(t)$,

$$f^{(2r-1)}(t) = \left(x^{(r-1)} * x^{(r)}\right)(t) = \left(\left(x^{(r-1)} - c\right) * x^{(r)}\right)(t),$$

где c — произвольная константа. Кроме того,

$$\|f\|_\infty = f(0) = \|x\|_2^2, \qquad \left\|f^{(2k)}\right\|_\infty = f^{(2k)}(0) = \left\|x^{(k)}\right\|_2^2.$$

Поэтому, подставляя $f = x * x$ в (3), для функций $x \in L_1^r$ получаем неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le C_{2r-1,2k} \|x\|_2^{2\left(1-\frac{2k}{2r-1}\right)} \left\|\left(x^{(r-1)} - c\right) * x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{2k}{2r-1}}. \tag{4}$$

Пусть

$$c = c_\infty\left(x^{(r-1)}\right) := \frac{1}{2}\left(\max_t x^{(r-1)}(t) + \min_t x^{(r-1)}(t)\right)$$

— константа наилучшего равномерного приближения функции $x^{(r-1)}$. Поскольку

$$\left\| x^{(r-1)} - c_\infty\left(x^{(r-1)}\right)\right\|_\infty \leq \frac{1}{4}\bigvee_0^{2\pi} x^{(r-1)} = \frac{1}{4}\left\| x^{(r)}\right\|_1,$$

то

$$\left\|\left(x^{(r-1)} - c_\infty\left(x^{(r-1)}\right)\right) * x^{(r)}\right\|_\infty \leq \left\| x^{(r-1)} - c_\infty\left(x^{(r-1)}\right)\right\|_\infty \left\| x^{(r)}\right\|_1 \leq \frac{1}{4}\left\| x^{(r)}\right\|_1^2,$$

и, используя (4), получаем неравенство

$$\left\| x^{(k)}\right\|_2^2 \leq C_{2r-1,\,2k}\,\| x\|_2^{2\left(1-\frac{2k}{2r-1}\right)}\left(\frac{1}{4}\left\| x^{(r)}\right\|_1\right)^{\frac{2k}{2r-1}}. \tag{5}$$

Далее, так как

$$\| g_l\|_2^2 = \int_0^{2\pi} g_l(t) g_l(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\varphi_{l-1}(t)\frac{1}{4}\varphi_{l-1}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left|\int_0^{2\pi}\varphi_{2l-2}(t)\varphi_0(t)\,dt\right| = \frac{1}{16}\bigvee_0^{2\pi}(\varphi_{2l-1}) = \frac{1}{4}\|\varphi_{2l-1}\|_\infty,$$

нетрудно видеть, что

$$4^{-\frac{2k}{2r-1}} C_{2r-1,\,2k} = \left(\frac{\| g_{r-k}\|_2}{\| g_r\|_2^{\frac{r-k-1/2}{r-1/2}}}\right)^2.$$

Таким образом, из (5) следует неравенство (2). Точность неравенства (2) проверяется с помощью семейства функций

$$F_h(t) = (2h)^{-1}\int_{t-h}^{t+h} g_r(u)\,du$$

при $h \to 0$.

Замечание 3. На наш взгляд, неравенства типа (4) могут представлять самостоятельный интерес.

На основании теоремы 1 с помощью теоремы эквивалентности 4.1 из работы [1] устанавливаем справедливость следующих утверждений.

Пусть

$$W_p^r := \left\{x \in L_p^r : \left\| x^{(r)}\right\|_p \leq 1\right\},$$

и для $N > 0$

$$E\left(W_2^k, NW_2^r\right)_\infty := \sup_{x\in W_2^k}\ \inf_{y\in NW_2^r}\| x - y\|_\infty.$$

Теорема 2. *Пусть $r, k \in N$, $k < r$. Тогда для любого $N > 0$*

$$E\left(W_2^k, NW_2^r\right)_\infty \leq \frac{r-k}{k-1/2}\,\frac{\left(\| g_k\|_2 \dfrac{k-1/2}{r-1/2}\right)^{\frac{r-1/2}{r-k}}}{\| g_r\|_2^{\frac{k-1/2}{r-k}}}\, N^{-\frac{k-1/2}{r-k}}.$$

Константа при $N^{-\frac{k-1/2}{r-k}}$ *неулучшаема.*

Теорема 3. *Пусть* $r, k \in N$, $k < r$. *Тогда для любого* $t > 0$

$$\sup_{x \in W_2^k} \inf_{y \in L_2^r} \left\{ \|x - y\|_\infty + t \left\| y^{(r)} \right\|_2 \right\} \le \frac{\|g_k\|_2}{\|g_r\|_2^{\frac{k-1/2}{r-1/2}}} t^{\frac{k-1/2}{r-1/2}}.$$

Константа при $t^{\frac{k-1/2}{r-1/2}}$ *неулучшаема.*

Отметим, что в случае $k < r/2$ эти утверждения следуют из теорем 5.1 и 5.2 работы [1].

1. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // East J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
2. *Бабенко В. Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 9 – 29.
3. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова в случае малых гладкостей // Допов. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 11 – 15.
4. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
5. *Колмогоров А. А.* Избранные труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.

Получено 31.05. 2001