УДК 62-501.47

О. А. Капустян (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

We consider the approximated optimal control based on the principle of feed-back relation (synthesis) for a parabolic boundary-value problem. We represent the feed-back operator as Fourier series in terms of eigenfunctions of the Laplace operator which enables us to use these results in practice. In view of this fact, we justify the convergence of approximated controls, switching points, and values of the quality criterion to exact values of corresponding variables.

Розглянуто наближене оптимальне керування за принципом оберненого зв'язку (синтезу) для параболічної крайової задачі. Оператор оберненого зв'язку подається за допомогою рядів Фур'є за власними функціями оператора Лапласа, що не дозволяє використати ці результати для практичного застосування. У зв'язку з цим обґрунтовується збіжність наближених керувань, точок перемикання, значень критерію якості до точних значень відповідних величин.

Розглянемо наступну задачу оптимального керування:

керований процес у циліндрі $Q = \Omega \times [t_0, T]$ описується функцією $y(x,t)$, яка задовольняє крайову задачу

$$\begin{gathered} y_t(x,t) = \Delta y(x,t) + g(x)v(t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (t_0, T), \\ y(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \\ y(x,t_0) = \varphi(x), \end{gathered} \tag{1}$$

де Δ — оператор Лапласа, $\Omega \subset R^n$ — обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $g, \varphi \in L_2(\Omega)$;

на керування v накладено локальні обмеження

$$v \in U = \left\{ v \in L_2(t_0,T) \mid |v(t)| \le \xi \quad \text{м.с. на } (t_0,T) \right\}; \tag{2}$$

напіввизначений критерій якості

$$I(v) = \left(\int_\Omega q(x) y(x,T)\,dx \right)^2 + \gamma \int_{t_0}^{T} v^2(t)\,dt, \tag{3}$$

де $\gamma = \text{const} > 0$, $q \in L_2(\Omega)$. Відомо, що задача (1)–(3) має єдиний розв'язок [1, 2]. У роботі [3] при деяких обмеженнях на функції g, q виписано явні формули для оптимального керування задачі (1)–(3) у формі оберненого зв'язку (синтезу). Проте ці формули містять нескінченні ряди за коефіцієнтами Фур'є функцій g, q, φ і власних значень оператора Лапласа. Для практичного застосування природно обмежитись в цих рядах лише скінченною кількістю доданків. Мета даної роботи — довести, що так побудовані наближені керування збігаються до оптимальних і при переході до границі реалізують мінімум функціонала (3). Для цього спочатку необхідно вивести згадані точні формули [3, 4].

Розглянемо спектральну задачу

$$\begin{gathered} -\Delta X(x) = \lambda^2 X(x), \qquad x \in \Omega, \\ X(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{4}$$

Нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{X_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — власні числа і власні функції задачі (4), $0 < \lambda_1 < < \lambda_2 < \ldots$, $\{X_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ утворюють ортонормований базис в $L_2(\Omega)$.

Задача (1) при фіксованому $v \in U$ має єдиний розв'язок $y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) X_i(x)$, де для будь-якого $i \ge 1$ y_i — розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -\lambda_i^2 y_i + g_i v, \\ y_i(t_0) &= \varphi_i, \end{aligned} \tag{5}$$

g_i, φ_i — коефіцієнти Фур'є функцій g і φ відповідно. Якщо позначити $a(t) = a[t, y] = \sum_{i=1}^{\infty} q_i y_i(t) \exp \lambda_i^2 (t-T)$, $b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i g_i \exp \lambda_i^2 (t-T)$, $\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \varphi_i \exp \lambda_i^2 (t_0 - T)$, то задача (1) – (3) еквівалентна такій задачі оптимального керування [4]:

$$\begin{gathered} \dot{a}(t) = b(t)v(t), \\ a(t_0) = \Phi, \\ v \in U, \quad J(v) = (a(T))^2 + \gamma \int_{t_0}^{T} v^2(t)\,dt \to \inf. \end{gathered} \tag{6}$$

Будемо вважати, що $b(t) > 0$ і є монотонно зростаючою функцією. Тоді за принципом максимуму Понтрягіна задача (6) має єдиний розв'язок, а оптимальне керування задається формулою

$$u(t) = \begin{cases} -\xi, & -\gamma^{-1} a(T) b(t) \le -\xi; \\ -\gamma^{-1} a(T) b(t), & -\xi < \gamma^{-1} a(T) b(t) < \xi; \\ \xi, & -\gamma^{-1} a(T) b(t) \ge \xi. \end{cases} \tag{7}$$

Якщо виконується нерівність

$$\gamma^{-1} |\Phi| b(T) \left(1 + \gamma^{-1} \int_{t_0}^{T} (b(\tau))^2 d\tau \right)^{-1} < \xi, \tag{8}$$

тобто керування не виходить на обмеження, то воно має вигляд

$$u(t) = -\gamma^{-1} \Phi b(t) \left(1 + \gamma^{-1} \int_{t_0}^{T} (b(\tau))^2 d\tau \right)^{-1}. \tag{9}$$

Якщо виконується система нерівностей

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} |\Phi| b(t_0) \left(1 + \gamma^{-1} \int_{t_0}^{T} (b(\tau))^2 d\tau \right)^{-1} &< \xi, \\ \gamma^{-1} |\Phi| b(T) \left(1 + \gamma^{-1} \int_{t_0}^{T} (b(\tau))^2 d\tau \right)^{-1} &> \xi, \end{aligned} \tag{10}$$

то

$$u(t) = \begin{cases} -\gamma^{-1} b(t) \left(\Phi \mp \xi \int_{t_1}^{T} b(\tau) d\tau \right) \left(1 + \gamma^{-1} \int_{t_0}^{t_1} (b(\tau))^2 d\tau \right)^{-1}, & t \in [t_0, t_1]; \\ \mp\xi, \quad t \in (t_1, T], \end{cases} \tag{11}$$

де точка t_1 є розв'язком рівняння

$$\pm\xi = \gamma^{-1}b(\theta)\left(\Phi \mp \xi\int_{\theta}^{T} b(\tau)d\tau\right)\left(1+\gamma^{-1}\int_{t_0}^{\theta}(b(\tau))^2 d\tau\right)^{-1}. \tag{12}$$

Використовуючи граничний перехід М. М. Красовського [1], отримаємо наступні синтезовані оптимальні керування. Якщо виконується (8), то

$$u[t,y] = -\gamma^{-1}b(t)a[t,y]\left(1+\gamma^{-1}\int_{t}^{T}(b(\tau))^2 d\tau\right)^{-1}. \tag{13}$$

Якщо виконується (10), то

$$u[t,y] = \begin{cases} -\gamma^{-1}b(t)\left(a[t,y] \mp \xi\int_{t_1}^{T} b(\tau)d\tau\right)\left(1+\gamma^{-1}\int_{t}^{t_1}(b(\tau))^2 d\tau\right)^{-1}, & t\in[t_0,t_1]; \\ \mp\xi, \quad t\in(t_1,T], \end{cases} \tag{14}$$

причому справджується рівність

$$\pm\xi = \gamma^{-1}b(t_1)\left(a[t,y] \mp \xi\int_{t_1}^{T} b(\tau)d\tau\right)\left(1+\gamma^{-1}\int_{t}^{t_1}(b(\tau))^2 d\tau\right)^{-1}. \tag{15}$$

Тут $y = y(x,t)$ — розв'язок (1) при $v(t) = u[t,y]$.

Тепер замінимо в (13) – (15) нескінченні ряди $b(t)$ і $a[t,y]$ їх частковими сумами $b_N(t)$ і $a_N[t,y]$ відповідно. Тоді наближені керування для (13) і (14) будуть мати відповідно вигляд

$$u_N[t,y_N] = -\gamma^{-1}b_N(t)a_N[t,y_N]\left(1+\gamma^{-1}\int_{t}^{T}(b_N(\tau))^2 d\tau\right)^{-1}, \tag{16}$$

$$u_N[t,y_N] = \begin{cases} -\gamma^{-1}b_N(t)\left(a_N[t,y_N] \mp \xi\int_{t_{1N}}^{T} b_N(\tau)d\tau\right)\left(1+\gamma^{-1}\int_{t}^{t_{1N}}(b_N(\tau))^2 d\tau\right)^{-1}, & t\in[t_0,t_{1N}]; \\ \mp\xi, \quad t\in(t_{1N},T], \end{cases} \tag{17}$$

причому справджується рівність

$$\pm\xi = \gamma^{-1}b_N(t_{1N})\left(a_N[t,y_N] \mp \xi\int_{t_{1N}}^{T} b_N(\tau)d\tau\right)\left(1+\gamma^{-1}\int_{t}^{t_{1N}}(b_N(\tau))^2 d\tau\right)^{-1}. \tag{18}$$

Тут $y_N = y_N(x,t)$ — розв'язок (1) при $v(t) = u_N[t,y_N]$.

Теорема. *Нехай $b_N(\cdot)$ — додатна, монотонно зростаюча функція для будь-якого $N \geq N_0$.*

1. *Якщо має місце нерівність* (8), *то керування* (16) *розв'язує задачу наближеного синтезу, тобто*

$$\lim_{N\to\infty}\left|u_N[t,y_N] - u[t,y]\right| = 0 \qquad \forall t\in[t_0,T],$$
$$\lim_{N\to\infty}\left|J(u_N[t,y_N]) - J(u[t,y])\right| = 0, \tag{19}$$

де $u[t,y]$ задається формулою (13).

2. *Якщо виконується система нерівностей* (10), *то керування* (17) *розв'язує задачу наближеного синтезу, тобто виконуються граничні рівності* (19) *для* $u[t, y]$ *із* (14).

Доведення. Оскільки $b_N(\cdot) \to b(\cdot)$ в $C([t_0, T])$, то $b(\cdot)$ — додатна, монотонно зростаюча функція, отже, справджуються (7) – (15). Доведемо п. 2 (п. 1 доводиться з тих же міркувань, але значно простіше). Спочатку покажемо, що існує $N_1 \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $N \geq N_1$ існує єдине керування $u_N[t, y_N]$, яке задовольняє (17), (18). Для цього розглянемо задачу (1) – (3), тільки замість $q(x)$ візьмемо $q_N(x) = \sum_{i=1}^{N} q_i X_i(x)$. При фіксованому $v \in U$ будемо шукати розв'язок (1) у вигляді

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) X_i(x),$$

де y_i — розв'язок задачі Коші (5). Тоді для $a_N(t) = a_N[t, y] = \sum_{i=1}^{N} q_i y_i(t) \times \times \exp \lambda_i^2 (t - T)$ в силу (5) легко довести, що задача оптимального керування (1) – (3) з функцією q_N замість q еквівалентна такій задачі оптимального керування:

$$\dot{a}_N(t) = \sum_{i=1}^{N} q_i g_i \exp \lambda_i^2 (t - T) v(t) = b_N(t) v(t),$$

$$a_N(t_0) = \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i \exp \lambda_i^2 (t_0 - T) = \Phi_N, \tag{20}$$

$$J_N(v) = (a_N(T))^2 + \gamma \int_{t_0}^{T} v^2(t) dt \to \inf.$$

Оскільки $\Phi_N \to \Phi$, то існує таке $N_* \geq 1$, що для будь-якого $N \geq N_*$ система нерівностей (10) має місце, якщо замінити в ній Φ на Φ_N і $b(\cdot)$ на $b_N(\cdot)$. Нехай $N_1 = \max\{N_0, N_*\}$. Тоді для будь-якого $N \geq N_1$ єдиним розв'язком (20) буде

$$v_N(t) = \begin{cases} -\gamma^{-1} b_N(t) \left(\Phi_N \mp \xi \int_{t_N}^{T} b_N(\tau) d\tau \right) \left(1 + \gamma^{-1} \int_{t_0}^{t_N} b_N^2(\tau) d\tau \right)^{-1}, & t \in [t_0, t_N]; \\ \mp \xi, \quad t \in (t_N, T], \end{cases} \tag{21}$$

де точка t_N є розв'язком рівняння

$$\pm \xi = \gamma^{-1} b_N(\theta) \left(\Phi_N \mp \xi \int_{\theta}^{T} b_N(\tau) d\tau \right) \left(1 + \gamma^{-1} \int_{t_0}^{\theta} b_N^2(\tau) d\tau \right)^{-1}. \tag{22}$$

З (21), використовуючи граничний перехід М. М. Красовського, отримуємо синтезоване оптимальне керування

$$v_N[t, y_N] = \begin{cases} -\gamma^{-1} b_N(t) \left(a_N[t, y_N] \mp \xi \int_{t_N}^{T} b_N(\tau) d\tau \right) \left(1 + \gamma^{-1} \int_{t}^{t_N} b_N^2(\tau) d\tau \right)^{-1}, & t \in [t_0, t_N]; \\ \mp \xi, \quad t \in (t_N, T], \end{cases} \tag{23}$$

де $y_N = y_N(x, t)$ — розв'язок задачі (1) з керуванням (23), і справджується рівність

$$\pm\xi = \gamma^{-1}b_N(t_N)\left(a_N[t,y_N]\mp\xi\int\limits_{t_N}^{T}b_N(\tau)d\tau\right)\left(1+\gamma^{-1}\int\limits_{t}^{t_N}b_N^2(\tau)d\tau\right)^{-1}. \tag{24}$$

Звідси одержуємо існування наближеного керування (17), (18), оскільки можемо покласти $v_N[t,y_N]\equiv u_N[t,y_N]$. Доведемо єдиність.

Лема 1. *Якщо число* Φ *і додатна, монотонно зростаюча функція* $b(\cdot)\in C([t_0,T])$ *задовольняють систему нерівностей* (10), *то рівняння* (12) *має не більше одного розв'язку.*

Доведення. З (12) безпосередньо випливає $|\Phi|>\xi\int_0^T b(\tau)d\tau$, як тільки θ — розв'язок (12). Нехай $\theta_1<\theta_2$ — два розв'язки (12). Тоді

$$\pm\xi\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}b^2(\tau)d\tau = b(\theta_2)\left(\Phi\mp\xi\int\limits_{\theta_2}^{T}b(\tau)d\tau\right)-b(\theta_1)\left(\Phi\mp\xi\int\limits_{\theta_1}^{T}b(\tau)d\tau\right),$$

$$\pm\xi\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}b^2(\tau)d\tau = (b(\theta_2)-b(\theta_1))\left(\Phi\mp\xi\int\limits_{\theta_1}^{T}b(\tau)d\tau\right)\pm\xi b(\theta_2)\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}b(\tau)d\tau.$$

Прийшли до суперечності. Отже, $\theta_1=\theta_2$ і лему доведено.

При $t=t_0$ (24) перетворюється в (22) і за лемою 1 має єдиний розв'язок. Таким чином, точка перемикання t_{1N} у керуваннях (17), що задовольняють (18), визначається єдиним чином і збігається з t_N.

Лема 2. *Задача* (1) *з керуванням* (17), *що задовольняє* (18), *має єдиний розв'язок в* $L_2(t_0,T;L_2(\Omega))$. *Цей розв'язок належить* $C([t_0,T];L_2(\Omega))$ *і для будь-якого* $t\in[t_0,T]$ *задовольняє оцінку*

$$\int\limits_{t_0}^{T}\left(\|y_t\|^2_{H^{-1}}+\|y\|^2_{H_0^1}\right)dt+\|y(t)\|^2_{L_2}\le C\left(\|\varphi\|^2_{L_2}+\xi^2\|g\|^2_{L_2}T\right). \tag{25}$$

Доведення. Існування випливає з (23), (24), причому оскільки $|v_N[t,y_N]|\le\xi$ і $\varphi\in L_2(\Omega)$, то з [5] $y_N\in C([t_0,T];L_2(\Omega))$ і виконується оцінка (25). Тепер нехай y_N^1, y_N^2 — два розв'язки (1) з керуванням (17), (18) із класу $L_2(t_0,T;L_2(\Omega))$. Оскільки $|u_N[t,y_N^i]|\le\xi$, то $y_N^i\in C([t_0,T];L_2(\Omega))$, $i=1,2$. Для $w_N=y_N^1-y_N^2$ на $[t_0,t_N]$ маємо нерівність [5]

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N(t)\|^2_{L_2}+\lambda_1\|w_N(t)\|^2_{L_2}\le\gamma^{-1}\|g\|^2_{L_2}\|q\|^2_{L_2}\|w_N(t)\|^2_{L_2}. \tag{26}$$

Оскільки $w_N(t_0)=0$, з (26) і нерівності Гронуолла безпосередньо маємо $w_N(t)=0$ $\forall t\in[t_0,t_N]$. Звідси $w_N(t)=0$ $\forall t\in[t_0,T]$ і лему доведено.

Отже, єдиним наближеним керуванням (17), що задовольняє (18), є $v_N[t,y_N]$. Тепер доведемо граничні рівності (19). Оскільки $\{t_N\}_{N\ge N_1}\subset[t_0,T]$, то по деякій підпослідовності $t_N\to t_*\in[t_0,T]$. Переходячи до границі при $N\to\infty$ в рівності (22), отримуємо, що t_* — розв'язок рівняння (12) і в силу леми 1 $t_*=t_1$ і збіжність має місце по всій послідовності. Переходячи до границі при $N\to\infty$ у формулі (21), легко отримуємо $v_N(t)\to u(t)$ $\forall t\in[t_0,T]$, де $u(\cdot)$ визначено в (11). Оскільки $u_N[t,y_N]\equiv v_N[t,y_N]\equiv v_N(t)$ і $u[t,y]\equiv u(t)$, то $\lim_{N\to\infty}|u_N[t,y_N]-u[t,y]|=0$ $\forall t\in[t_0,T]$. Залишилося довести збіжність критерію якості. Оскільки y_N задовольняє (25), послідовність $\{y_{N_t}\}$ обмежена в $L_2(t_0,T;H^{-1}(\Omega))$, $\{y_N\}$ — в $L_2(t_0,T;H_0^1(\Omega))$ і в $C([t_0,T];L_2(\Omega))$. Звідси за лемою про компактність по деякій підпослідовності $y_N \to z$ в $L_2(t_0, T; L_2(\Omega))$ $y_N(t) \to z(t)$ слабко в $L_2(\Omega)$ $\forall t \in [t_0, T]$. Оскільки $v_N(t) \to u(t)$ $\forall t \in [t_0, T]$, можемо перейти до границі в задачі (1) з керуванням $v_N(\cdot)$ і отримати, що $z \equiv \equiv y$ — єдиний розв'язок задачі (1) з керуванням $u(\cdot)$ і збіжність $y_N \to y$ має місце по всій послідовності. Зокрема, $y_N(T) \to y(T)$ слабко в $L_2(\Omega)$. Тоді

$$I(u_N[t, y_N]) = I(v_N(t)) = \left(\int_\Omega q(x) y_N(x, T)\, dx\right)^2 + \gamma \int_{t_0}^T v_N^2(t)\, dt \to$$

$$\to \left(\int_\Omega q(x) y(x, T)\, dx\right)^2 + \gamma \int_{t_0}^T u^2(t)\, dt = I(u(t)),$$

що й доводить теорему.

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
2. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
3. *Капустян Е. А., Наконечный А. Г.* Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 44 – 57.
4. *Завалищин С. Т.* Минимаксный вариант задачи Майера при мгновенных ограничениях на полные импульсы управлений // Тр. Ин-та математики и механики УрНЦ АН СССР. – 1979. – **32**. – С. 34 – 44.
5. *Ладыженская О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Одержано 09.02.2001