УДК 517.5

И. В. Момот (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ ХАНА – БАНАХА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ВЫПУКЛОСТИ*

We investigate a class of compact sets that are convex with respect to some family of planes. For compact sets satisfying conditions of acyclicity of intersections with certain set of two-dimensional planes, we prove their generalized convexity.

Досліджено клас компактів, опуклих відносно деякої сім'ї площин. Для компактів, що задовольняють умову ациклічності перерізів деяким набором двовимірних площин, доведено їх узагальнену опуклість.

Пусть задана пара многообразий (M, M^*), порождающая (n, m)-выпуклость [1]. Не нарушая общности, предположим, что M — евклидово пространство R^n, тогда M^* — грассманово многообразие $G'(n, m)$ m-плоскостей в R^n. Будем говорить, что подмножество $A \subset G'(n, m)$ индуцирует на R^n $(n, m; A)$-выпуклость, если для каждой точки $x \in R^n$ существует m-плоскость $l(y) \supset x$, задаваемая некоторой точкой $y \in A$. В случае, когда $A = G'(n, m)$, $(n, m; A)$-выпуклость совпадает с (n, m)-выпуклостью.

Определение 1. *Множество $E \subset R^n$ назовем $(n, m; A)$-выпуклым, если для произвольной точки $x \in R^n \setminus E$ существует m-плоскость $l(y) \supset x$, задаваемая точкой $y \in A$, и $l(y) \bigcap E = \varnothing$.*

Очевидно, что если $A \subset B$, то каждое $(n, m; A)$-выпуклое множество будет $(n, m; B)$-выпуклым. Поэтому если мы обозначим через W_A класс всех $(n, m; A)$-выпуклых множеств, то справедлива импликация

$$A \subset B \Rightarrow W_A \subset W_B.$$

Легко проверить, что пересечение произвольного семейства множеств $\{B_i\}$ из класса W_A тоже принадлежит классу W_A. Следовательно, таким образом определенная выпуклость удовлетворяет аксиоме выпуклости.

***Пример* 1.** Пусть $E \subset R^n$ — $(n, m; A)$-выпуклое множество. Тогда E — m-выпуклое множество [2].

Из этого следует, что $(n, m; A)$-выпуклые множества удовлетворяют всем результатам, установленным в [2] для m-выпуклых множеств. С другой стороны, $(n, m; A)$-выпуклые множества — это более узкий класс множеств, и нашей дальнейшей задачей будет установление дополнительных свойств класса W_A, которые определяются выбором множества A.

Из определения и свойств сопряженного множества [1] следует, что если $A \supset E^*$, то $E^{**} \subset W_A$.

***Пример* 2.** Линейно выпуклые подмножества комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ — это пример $(2n, 2n-2; \mathbb{C}^n)$-выпуклых множеств, для которых $G'(2n, 2n-2) \supset E^* \not\subset A$. Ведь комплексные гиперплоскости не исчерпывают множества всех $(2n-2)$-плоскостей в $R^{2n} \approx \mathbb{C}^n$.

Определение 2. *Для произвольного множества $E \subset R^n$ назовем подмножество $E^* \subset A$ сопряженным к множеству E, если $E^* = \{ y \in A \mid m$-плоскость, порождаемая точкой y, не пересекает $E\}$.*

* Частично поддержана проектом INTAS-99-00089.

Определение 3. *W_A-оболочкой $[E]$ множества E назовем максимальное содержащее E множество, имеющее свойство $[E]^* = E^*$.*

Утверждение 1. *Если $E \in W_A$, то $[E] = E$.*

Доказательство очевидно.

Будем говорить, что класс W_A-регулярен, если A — компакт и для произвольной $(n-m)$-плоскости l и точки $x \in l$ существует m-плоскость L, задаваемая некоторой точкой $y \in A$ такой, что $L \bigcap l = x$.

Утверждение 2. *Если $E \subset R^n$ — $(n, m; A)$-выпуклый компакт, принадлежащий регулярному классу W_A, а множество E^* линейно связно, то сечение E произвольной (n, m)-плоскостью имеет в этой плоскости связное дополнение.*

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : R^n \to G'(n, m)$, ставящее в соответствие точке x подмножество m-плоскостей из A, проходящих через точку x. В силу компактности A — непрерывное многозначное отображение с компактными образами. Тогда образ $\Phi(E) \subset A$ — компакт [3]. Множество $E^* = A \setminus \Phi(E)$.

Пусть некоторое сечение E некоторой $(n-m)$-плоскостью L имеет несвязное дополнение. Выберем две точки x_1 и x_2, находящиеся в разных компонентах $L \setminus E$. В силу $(n, m; A)$-выпуклости E для точек x_1 и x_2 существуют m-плоскости l_1 и l_2 такие, что $x_i \in l_i$, $l_i \bigcap E = \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots$. Плоскости l_1, l_2 заданы парой точек y_1 и y_2 соответственно, лежащих в E^*. Линейная связность множества E^* позволяет соединить эти точки непрерывным путем τ, лежащим в E^*. Каждой точке этого пути соответствует m-плоскость в R^n, не пересекающая E, причем $l(\tau_0) = l_1$, $l(\tau_1) = l_2$. Следовательно, мы построили изотопию, соединяющую две плоскости, и поэтому эти плоскости должны лежать в одной связной компоненте множества $L \setminus E$, что невозможно в силу выбора точек x_1 и x_2. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Пусть в пространстве R^n задано семейство Ω двумерных плоскостей, имеющее такое свойство. Через произвольную пару точек проходит единственная плоскость, принадлежащая семейству Ω. Примерами таких семейств могут быть:

а) семейство Z комплексных прямых в пространстве $\mathbb{C}^n$;

б) семейство, полученное из семейства Z вещественно-аффинным преобразованием, не сохраняющим комплексную структуру.

Отметим также, что в силу определения семейства Ω две плоскости, принадлежащие ему, могут пересекаться не более чем в одной точке, если они не совпадают. Такое семейство назовем *минимизирующим*.

Теорема 1. *Пусть $K \subset R^n$ — компакт и $a \in K$ — такая точка, что сечение K произвольной двумерной плоскостью минимизирующего семейства Ω, проходящей через точку a, ациклично. Тогда K — ацикличный компакт.*

Доказательство. Рассмотрим подмножество $\Omega_1 \subset \Omega$ плоскостей, проходящих через точку a в грассмановом многообразии $G(n, 2)$. Имеем многозначное ацикличное отображение $F : \Omega_1 \to K$, которое каждой плоскости (точке грассманова многообразия) ставит в соответствие сечение K этой плоскостью. Очевидно, что $F(\Omega_1) = K$. Воспользуемся теоремой Вьеториса – Бегла [4]. Согласно этой теореме проекция графика $\Gamma(F)$ отображения F $p : \Gamma(F) \to \Omega_1$ индуцирует изоморфизм групп когомологий $p^* : H^j(\Omega_1) \to H^j(\Gamma(F))$. Другая проекция графика $q:\Gamma(F)\to K$ отображает подмножество $\Omega_1\times a\subset\Gamma(F)$ в точку a и является гомеоморфизмом на дополнении к этому множеству в силу свойств семейства Ω. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F) & \xrightarrow{q} & K \\ \cup & & \cup, \\ \Omega_1\times a & \xrightarrow{q_1} & a \end{array}$$

где $q_1 = q\big|_{\Omega_1\times a}$ — ограничение, $\alpha:\Omega_1\times a\to\Gamma(F)$ — вложение и $q(\Gamma(F)\setminus(\Omega_1\times a)) = K\setminus A$. Поэтому этой диаграмме соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий

$$\begin{array}{ccccccc} H^j(\Gamma(F),\Omega_1\times a) & \to & H^j(\Gamma(F)) & \to & H^j(\Omega_1\times a) & \to & H^{j+1}(\Gamma(F),\Omega_1\times a) \\ q^*\uparrow & & q^*\uparrow & & q_1^*\uparrow & & q^*\uparrow \\ H^j(K,a) & \to & H^j(K) & \to & H^j(a) & \to & H^{j+1}(K,a). \end{array} \qquad (*)$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1\times a & \overset{\alpha}{\subset} & \Gamma(F) \\ & p_1\searrow \quad \swarrow p & \\ & \Omega_1 & \end{array}$$

(где p_1 — ограничение p на подмножество), которой соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий

$$\begin{array}{ccc} H^j(\Omega_1\times a) & \xleftarrow{\alpha^*} & H^j(\Gamma(F)) \\ & p_1^*\nwarrow \quad \nearrow p^* & \\ & H^j(\Omega_1) & \end{array}$$

получим, что α^* — изоморфизм во всех размерностях. Тогда из точности верхнего ряда когомологических последовательностей $(*)$ имеем $H^j(\Gamma(F),\Omega_1\times a) = 0$ во всех размерностях. Далее, относительный гомеоморфизм

$$\tilde{q}:\Gamma(F)\setminus(\Omega_1\times a)\to K\setminus A$$

индуцирует изоморфизм $\tilde{q}^*$ соответственных относительных групп когомологий. Следовательно, $H^j(K,a)=0$ во всех размерностях. Из точности нижнего ряда когомологической последовательности $(*)$ получаем изоморфизм $H^j(K)\approx H^j(a)$. Теорема доказана.

Определение 4. *Пусть A — семейство $(n-2)$-плоскостей, порождающих $(n, n-2; A)$-выпуклость, а Ω — минимизирующее семейство двумерных плоскостей. Пару семейств (A,Ω) назовем регулярной, если для произвольной пары плоскостей $L\in A$, $l\in\Omega$ возможен только один из трех случаев*:

а) $L\cap l=\varnothing$;

б) $L\supset l$;

в) $L\cap l$ *состоит из одной точки.*

Кроме того, для произвольной плоскости λ, $\dim\lambda < n-2$, *существует содержащая ее плоскость* $L \in A$.

Будем говорить, что плоскость l *наследственная*, если она образована пересечением плоскостей семейства A.

Докажем геометрический вариант теоремы Хана – Банаха для областей, сечения которых двумерными плоскостями заданного выше семейства Ω ацикличны.

Теорема 2. *Пусть* $K \subset R^n$ — *непустой компакт такой, что произвольное его сечение плоскостями семейства* Ω *ациклично, и* l — *наследственная плоскость в* R^n *такая, что* $0 \le \dim l < n-2$ (*если* $\dim l = 0$, *то плоскость превращается в точку*) *и* $l \cap K = \varnothing$. *Тогда существует плоскость* $L \supset l$, $L \in A$, *такая, что* $L \cap K = \varnothing$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы легко следует, что K —ацикличный компакт. Рассмотрим подмножество плоскостей семейства Ω, проходящих через пару точек, одна из которых принадлежит l, а другая — некоторой наследственной плоскости $l_1 \supset l$, $\dim l_1 = \dim l + 2$, $l_1 \subset L \in A$. Если l_1 пересекает K, то аналогично предыдущей теореме установим, что $l_1 \cap K$ ациклично. Легко проверить, что множество плоскостей $l_1 \supset l$ на две единицы большей размерности гомеоморфно $M \approx S^2$. Если каждая плоскость из M пересекает K, то имеем многозначное отображение $F: M \to K$. Оно ациклично согласно установленному выше. Тогда, применяя теорему Вьеториса – Бегла к проекции p, получаем изоморфизм $p^*: H^2(\Gamma(F)) \approx H^2(M) = Z$. Но так как $l \cap K = \varnothing$, то проекция q — гомеоморфизм $\Gamma(F)$ на K. Следовательно, $H^2(K) \approx H^2(\Gamma(F)) \approx Z$, что противоречит ацикличности K. Отсюда следует, что существует плоскость $l_1 \in M$, которая не пересекает K. Процесс повышения размерности не пересекающей плоскости естественно можно проводить до тех пор, пока размерность l_1 не выше $n-2$. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме, в частности, доказано, что каждый компакт, имеющий ацикличные сечения относительно семейства Ω, будет $(n, n-2; A)$-выпуклым.

1. *Зелинский Ю. Б., Момот И. В.* О (n, m)-выпуклых множествах // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 422 – 427.
2. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
3. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 596 с.; 1969. – Т. 2. – 624 с.
4. *Begle E. G.* The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces // Ann. Math. – 1950. – **51**, № 3. – P. 534 – 543.

Получено 21.05.2002