УДК 517.91

**М. О. Перестюк** (Київ. нац. ун-т ім.Т. Шевченка),
**В. Ю. Слюсарчук** (Рівнен. техн. ун-т)

# УМОВИ ІСНУВАННЯ НЕКОЛИВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

For nonlinear differential second order equations with a delay and pulse influence in the Banach space, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of their solutions nonoscillating with respect to a subspace.

Одержано необхідні та достатні умови існування неколивних щодо підпростору розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку із запізненням та імпульсним збуренням у банаховому просторі.

Нехай $E$ — дійсний банахів простір, $E_1$ — довільний підпростір простору $E$, для якого $\operatorname{codim} E_1 = 1$, $\varphi$ — лінійний неперервний функціонал на $E$ з ядром $\ker\varphi = E_1$, $E_2 = \{ e \in E : \varphi(e) > 0 \}$, $E_3 = \{ e \in E : \varphi(e) < 0 \}$, $T$ — довільна злічення множина дійсних чисел $t_n$, $n \in \mathbb{N}$, для якої $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$.

Розглянемо імпульсну систему, що описується системою рівнянь

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)) = 0, \qquad t \in (t_0, +\infty) \setminus T,$$

$$x(t+0) = x(t-0) = x(t), \qquad t \in (t_0, +\infty) \cap T, \tag{1}$$

$$\Delta \frac{dx(t)}{dt} + g(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)) = 0, \qquad t \in (t_0, +\infty) \cap T,$$

де $m \in \mathbb{N}$, $f: ([0, +\infty) \setminus T) \times E^{m+1} \to E$ і $g: T \times E^{m+1} \to E$ — неперервні відображення, $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — додатні числа, $\Delta \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d_+x(t)}{dt} - \frac{d_-x(t)}{dt}$, $\frac{d_-x(t)}{dt}$ і $\frac{d_+x(t)}{dt}$ — ліва і права похідні розв'язку $x(t)$ в точці $t$, $t_0 \in [0, +\infty) \setminus T$.

Позначимо через $X_+$ множину всіх розв'язків $x = x(t)$ системи (1), для кожного з яких

$$\varphi(x(t)) > 0$$

для досить великих $t > 0$. Аналогічно через $X_-$ позначимо множину всіх розв'язків $x = x(t)$ системи (1), для кожного з яких

$$\varphi(x(t)) < 0$$

для досить великих $t > 0$ (в загальному випадку ці множини можуть бути порожніми).

Метою цієї статті є встановлення необхідних та достатніх умов виконання співвідношення

$$X_+ \cup X_- \neq \varnothing.$$

Зауважимо, що ця задача тісно пов'язана із задачею про осциляцію розв'язків системи (1) щодо підпростору $E_1$ (розв'язок $x(t)$ системи (1) називається осцилюючим щодо підпростору $E_1$ [1 – 6], якщо для кожного числа $a > 0$ знайдуться такі числа $s_1, s_2 \in (a, +\infty)$, що $\varphi(x(s_1))\,\varphi(x(s_2)) < 0$).

**1. Основні вимоги до системи (1).** Будемо вважати, що для відображень $f$ і $g$ справджуються рівності

$$f(s, x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{n} p_k(s) f_k(x_0, x_1, \ldots, x_m),$$

$$g(t, x_0, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) g_k(x_0, x_1, \ldots, x_m).$$

Тут $(s, x_0, x_1, \ldots, x_m) \in ([0, +\infty)\setminus T) \times E^{m+1}$, $(t, x_0, x_1, \ldots, x_m) \in T \times E^{m+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $p_k : (0, +\infty)\setminus T \to (0, +\infty)$, $k = \overline{1, n}$, — неперервні і обмежені функції, $q_k$ : $T \to (0, +\infty)$, $k = \overline{1, n}$, — довільні відображення і $f_k : E^{m+1} \to E$, $g_k : E^{m+1} \to E$, $k = \overline{1, n}$, — неперервні відображення, для яких $f_k E_i^{m+1} \subset E_i$, $g_k E_i^{m+1} \subset E_i$ для всіх $k = \overline{1, n}$ та $i = \overline{1, 3}$.

**2. Необхідні умови виконання нерівності $X_+ \cup X_- \neq \varnothing$.** Позначимо через $\Phi_k$ множину неперервних на $[0, +\infty)$ і диференційовних на $[0, +\infty)$ функцій $z = z_k(t)$ із значеннями в $E_k$, $k = \overline{2, 3}$, для кожної з яких $|\varphi(z_k(t))|$ — монотонна неспадна на $[0, +\infty)$ функція, а через $\Delta y(t_l)$ різницю першого порядку від $y(t_l)$, тобто $y(t_{l+1}) - y(t_l)$.

**Теорема 1.** *Нехай*:

1) *виконуються вимоги п.1;*

2) $$\inf_{s \geq t \geq \tau} \frac{\varphi(f_k(z(s), z(s-\tau_1), \ldots, z(s-\tau_m)))}{\varphi(f_k(z(t), z(t-\tau_1), \ldots, z(t-\tau_m)))} > 0 \quad i$$

$$\inf_{s \geq t \geq \tau} \frac{\varphi(g_k(z(s), z(s-\tau_1), \ldots, z(s-\tau_m)))}{\varphi(g_k(z(t), z(t-\tau_1), \ldots, z(t-\tau_m)))} > 0 \quad \textit{для всіх } z \in \Phi_2 \cup \Phi_3 \ i \ k = \overline{1, n},$$

*де* $\tau = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_2\}$;

3) *невласні інтеграли*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi(z(t))}{\varphi(f_k(z(t), z(t-\tau_1), \ldots, z(t-\tau_m)))}, \qquad k = \overline{1, n},$$

*і числові ряди*

$$\sum_{l=2}^{\infty} \frac{\Delta\varphi(z(t_{l-1}))}{\varphi(g_k(z(t_l), z(t_l-\tau_1), \ldots, z(t_l-\tau_m)))}, \qquad k = \overline{1, n},$$

*збігаються для всіх* $z \in \Phi_2 \cup \Phi_3$;

4) *виконується співвідношення* $X_+ \cup X_- \neq \varnothing$.

*Тоді*

$$\sum_{k=1}^{n} \left( \int_0^{+\infty} t p_k(t)\, dt + \sum_{t \in T} t q_k(t) \right) < +\infty. \tag{2}$$

***Доведення.*** Нехай $z \in X_+ \bigcup X_-$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що для деякого числа $a \in (t_0, +\infty)$

$$\varphi(z(t)) > 0 \qquad \forall t \geq a. \tag{3}$$

Оскільки завдяки (1)

$$\frac{d_-z(s)}{ds} - \frac{d_+z(t)}{dt} + \int_t^s f(u, z(u), z(u-\tau_1), \ldots, z(u-\tau_m))du +$$
$$+ \sum_{u \in (t,s) \bigcap T} g(u, z(u), z(u-\tau_1), \ldots, z(u-\tau_m)) = 0$$

для довільних $t \geq a + \tau$ і $s > t$ $(t, s \notin T)$ і, отже,

$$\varphi\left(\frac{d_-z(s)}{ds}\right) - \varphi\left(\frac{d_+z(t)}{dt}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_t^s p_k(u)\varphi(f_k(z(u), z(u-\tau_1), \ldots, z(u-\tau_m)))du +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{u \in (t,s) \bigcap T} q_k(u) g_k(z(u), z(u-\tau_1), \ldots, z(u-\tau_m)) = 0 \tag{4}$$

для тих же $t$ і $s$, то на підставі (3) та першої умови теореми

$$\sum_{k=1}^{n} \int_t^s p_k(u)\varphi(f_k(z(u), z(u-\tau_1), \ldots, z(u-\tau_m)))du +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{u \in (t,s) \bigcap T} q_k(u) g_k(z(u), z(u-\tau_1), \ldots, z(u-\tau_m)) \geq 0$$

для всіх $t$ і $s$, для яких $s > t \geq a + \tau$. Тому функція $\varphi\left(\frac{d_+z(t)}{dt}\right)$ є незростаючою функцією на $[a + \tau, +\infty)$. Отже, функція $\varphi(z(t))$ є вгнутою на $[a + \tau, +\infty)$ [7, с. 17] і існує границя

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi\left(\frac{d_+z(t)}{dt}\right) = c \geq 0$$

($c$ не може бути від'ємним на підставі (3) і вгнутості функції $\varphi(z(t))$ на $[a + \tau, +\infty)$). Звідси та із (4) випливає, що $\varphi(z(t))$ — монотонна неспадна на $[a + \tau, +\infty)$ функція і

$$\varphi\left(\frac{dz(t+0)}{dt}\right) = c + \sum_{k=1}^{n} \int_t^{+\infty} p_k(u)\varphi(f_k(z(u), z(u-\tau_1), \ldots, z(u-\tau_m)))du +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{u \in (t,+\infty) \bigcap T} q_k(u) g_k(z(u), z(u-\tau_1), \ldots, z(u-\tau_m)) \tag{5}$$

для всіх $t \geq a + \tau$.

Позначимо через $\delta$ найменше з чисел

$$\inf_{s\geq t\geq a-\tau}\frac{\varphi(f_k(z(s), z(s-\tau_1),\ldots, z(s-\tau_m)))}{\varphi(f_k(z(t), z(t-\tau_1),\ldots, z(t-\tau_m)))}, \qquad k=\overline{1,n},$$

і

$$\inf_{s\geq t\geq \tau}\frac{\varphi(g_k(z(s), z(s-\tau_1),\ldots, z(s-\tau_m)))}{\varphi(g_k(z(t), z(t-\tau_1),\ldots, z(t-\tau_m)))}, \qquad k=\overline{1,n},$$

яке на підставі другої умови теореми є додатним. Враховуючи включення $z\in\Phi_2$, збіжність невласних інтегралів

$$\int_{a+\tau}^{+\infty}\frac{d\varphi(z(t))}{\varphi(f_k(z(t), z(t-\tau_1),\ldots, z(t-\tau_m)))}, \qquad k=\overline{1,n},$$

і числових рядів

$$\sum_{l=k}^{\infty}\frac{\Delta\varphi(z(t_{l-1}))}{\varphi(g_k(z(t_l), z(t_l-\tau_1),\ldots, z(t_l-\tau_m)))}, \qquad k=\overline{1,n}$$

(тут $k$ — найменше із чисел множини $\mathbb{N}$, для яких $t_{k-1}\geq a+\tau$), а також те, що

$$\Delta\varphi(z(t_{l-1})) = \int_{t_{l-1}}^{t_l}\varphi\left(\frac{d\,z(t)}{dt}\right)dt =$$

$$= c\Delta t_{l-1} + \int_{t_{l-1}}^{t_l}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_t^{+\infty}p_k(u)\varphi(f_k(z(u), z(u-\tau_1),\ldots, z(u-\tau_m)))\,du\right)dt +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=l}^{\infty}q_k(t_i)\varphi(g_k(z(t_i), z(t_i-\tau_1),\ldots, z(t_i-\tau_m)))\right)\Delta t_{l-1} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=l}^{\infty}q_k(t_i)\varphi(g_k(z(t_i), z(t_i-\tau_1),\ldots, z(t_i-\tau_m)))\right)\Delta t_{l-1}$$

на підставі (5), приходимо до висновку, що для кожного $k=\overline{1,n}$

$$+\infty > \int_{a+\tau}^{+\infty}\frac{d\varphi(z(t))}{\varphi(f_k(z(t), z(t-\tau_1),\ldots, z(t-\tau_m)))} \geq$$

$$\geq \int_{a+\tau+1}^{+\infty}\frac{d\varphi\left(\frac{d_+z(t)}{dt}\right)}{\varphi(f_k(z(t), z(t-\tau_1),\ldots, z(t-\tau_m)))}dt \geq$$

$$\geq \int_{a+\tau+1}^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty}p_k(u)\frac{\varphi(f_k(z(u), z(u-\tau_1),\ldots, z(u-\tau_m)))}{\varphi(f_k(z(t), z(t-\tau_1),\ldots, z(t-\tau_m)))}du\right)dt \geq$$

$$\geq \delta\int_{a+\tau+1}^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty}p_k(u)\,du\right)dt = \delta\int_{a+\tau+1}^{+\infty}(t-a-\tau-1)\,p_k(t)dt \geq 0$$

і

$$+\infty > \sum_{l=k}^{\infty} \frac{\Delta\varphi(z(t_{l-1}))}{\varphi(g_k(z(t_l), z(t_l-\tau_1),\ldots, z(t_l-\tau_m)))} \geq$$

$$\geq \sum_{l=k}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=l}^{\infty} q_k(t_i)\varphi(g_k(z(t_i), z(t_i-\tau_1),\ldots, z(t_i-\tau_m)))\right)\Delta t_{l-1}}{\varphi(g_k(z(t_l), z(t_l-\tau_1),\ldots, z(t_l-\tau_m)))} \geq$$

$$\geq \sum_{l=k}^{\infty}\left(\sum_{i=l}^{\infty} \frac{\varphi(g_k(z(t_i), z(t_i-\tau_1),\ldots, z(t_i-\tau_m)))}{\varphi(g_k(z(t_l), z(t_l-\tau_1),\ldots, z(t_l-\tau_m)))} q_k(t_i)\right)\Delta t_{l-1} \geq$$

$$\geq \delta\sum_{l=k}^{\infty}\left(\sum_{i=l}^{\infty} q_k(t_i)\right)\Delta t_{l-1} = \delta\sum_{l=k}^{\infty}(t_l-t_{k-1})q_k(t_l) \geq 0.$$

Отже, невласні інтеграли

$$\int_{a+\tau+1}^{+\infty}(t-a-\tau-1)\,p_k(t)\,dt, \qquad k=\overline{1,n},$$

і числові ряди

$$\sum_{l=k}^{\infty}(t_l-t_{k-1})q_k(t_l), \qquad k=\overline{1,n},$$

збігаються. Тому виконується співвідношення (2).

Теорему 1 доведено.

**3. Достатні умови виконання нерівності $X_+ \bigcup X_- \neq \varnothing$.** Відображення $h: E \to E$ будемо називати локально ліпшицевим, якщо для довільних $b \in E$ і $r \in (0, +\infty)$ існує стала $M > 0$, для якої

$$\| h(x) - h(y) \|_E \leq M \| x - y \|_E$$

для всіх $x, y \in B(b, r) = \{ x \in E : \|x - b\| \leq r \}$.

**Теорема 2.** *Нехай:*

1) *відображення $f_k$ і $g_k$, $k = \overline{1,n}$, локально ліпшицеві або цілком неперервні;*

2) *виконується співвідношення* (2).

*Тоді для системи* (1) *для досить великого $t_0$ справджується нерівність $X_+ \bigcup X_- \neq \varnothing$.*

***Доведення.*** Розглянемо спочатку випадок локально ліпшицевих відображень $f_k$ і $g_k$, $k = \overline{1,n}$.

Візьмемо довільні вектор $y \in E_2 \bigcup E_3$ і замкнену кулю $B(y, r)$, $r > 0$, для яких $E_1 \bigcap B(y, r) = \varnothing$, і розглянемо рівняння

$$z(t) = y - \int_t^{+\infty}(s-t)\sum_{k=1}^{n} p_k(s)\,f_k(z(s), z(s-\tau_1),\ldots, z(s-\tau_n))\,ds -$$

$$-\sum_{s\in(t,+\infty)\bigcap T}(s-t)\sum_{k=1}^{n} q_k(s)g_k(z(s), z(s-\tau_1),\ldots, z(s-\tau_n)), \qquad t \geq a, \tag{6}$$

де $a$ — таке додатне число, що

$$\int_a^{+\infty}(s-a)\sum_{k=1}^n p_k(s)\sup_{x_0,x_1,\ldots,x_n\in B(y,r)}\|f_k(x_0,x_1,\ldots,x_n)\|_E\,ds+$$

$$+\sum_{s\in(t,+\infty)\bigcap T}(s-t)\sum_{k=1}^n q_k(s)\sup_{x_0,x_1,\ldots,x_n\in B(y,r)}\|g_k(x_0,x_1,\ldots,x_n)\|_E\le r \tag{7}$$

і

$$\sup_{t\ge a}\Bigg\|\int_t^{+\infty}(s-t)\sum_{k=1}^n p_k(s)f_k(z_1(s),z_1(s-\tau_1),\ldots,z_1(s-\tau_n))ds+$$

$$+\sum_{s\in(t,+\infty)\bigcap T}(s-t)\sum_{k=1}^n q_k(s)g_k(z_1(s),z_1(s-\tau_1),\ldots,z_1(s-\tau_n))-$$

$$-\int_t^{+\infty}(s-t)\sum_{k=1}^n p_k(s)f_k(z_2(s),z_2(s-\tau_1),\ldots,z_2(s-\tau_n))ds-$$

$$-\sum_{s\in(t,+\infty)\bigcap T}(s-t)\sum_{k=1}^n q_k(s)g_k(z_2(s),z_2(s-\tau_1),\ldots,z_2(s-\tau_n))\Bigg\|_E\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sup_{t\ge a-\tau}\|z_1(t)-z_2(t)\|_E \tag{8}$$

для всіх неперервних і обмежених на $[a-\tau,+\infty)$ із значеннями в $E$ функцій $z_i(t)$, $i=\overline{1,2}$, для яких $\sup\limits_{t\ge a}\|z_i(t)-y\|_E\le r$, $i=\overline{1,2}$. Будемо вважати, що в рівнянні (6) $z(u)=z(a)$ для всіх $u\in[a-\tau,a)$.

Співвідношення (7) і (8) можливі на підставі другої умови теореми та локальної ліпшицевості відображень $f_k$ і $g_k$, $k=\overline{1,n}$.

Далі розглянемо банахів простір $X$ неперервних і обмежених на $[a,+\infty)$ функцій $x=x(t)$ із значеннями в $E$ з нормою

$$\|x\|_X=\sup_{t\ge a}\|x(t)\|_E,$$

обмежену замкнену і опуклу множину $Y$ всіх функцій $x\in X$, для яких $x\in B(y,r)$ для всіх $t\ge a$, і оператор $\mathfrak{A}:X\to X$, визначений за допомогою рівності

$$(\mathfrak{A}x)(t)=y-\int_t^{+\infty}(s-t)f\big(s,x(s),(\mathcal{T}_{\tau_1}x)(s),\ldots,(\mathcal{T}_{\tau_n}x)(s)\big)ds-$$

$$-\sum_{s\in(t,+\infty)\bigcap T}(s-t)g\big(s,x(s),(\mathcal{T}_{\tau_1}x)(s),\ldots,(\mathcal{T}_{\tau_n}x)(s)\big),\qquad t\ge a, \tag{9}$$

де

$$(\mathcal{T}_{\tau_k}x)(t)=\begin{cases}x(t-\tau_k), & \text{якщо}\quad t\ge a+\tau_k;\\ x(a), & \text{якщо}\quad t\in[a,a+\tau_k),\end{cases}\qquad k=\overline{1,n}.$$

Із визначення оператора $\mathfrak{A}$ і співвідношень (7) і (8) випливає, що $\mathfrak{A}Y\subset Y$ і

$$\|\mathfrak{A}u - \mathfrak{A}w\|_X \le \frac{1}{2}\|u - w\|_X$$

для всіх $u, w \in Y$. Тому на підставі принципу стискаючих відображень [8, с. 72] знайдеться функція $z \in Y$, яка буде розв'язком рівняння (6). Неважко переконатися в тому, що ця функція також є розв'язком системи рівнянь (1) при $t_0 = a$. Із співвідношення $E_1 \cap B(y, r) = \varnothing$ випливає, що $z \in X_+ \cup X_-$.

Отже, у випадку локально ліпшицевих відображень $f_k$ і $g_k$, $k = \overline{1, n}$, теорему 2 доведено.

Тепер розглянемо випадок цілком неперервних відображень $f_k$ і $g_k$, $k = \overline{1, n}$. Візьмемо довільні вектори $y \in E_2 \cup E_3$ і число $r > 0$, для яких $E_1 \cap B(y, r) = \varnothing$, і розглянемо рівняння (6), де $a$ — таке число із $(0, +\infty)\setminus T$, що справджується співвідношення (7). Вибір такого числа $a$ можливий на підставі другої умови теореми та компактності відображень $f_k$ і $g_k$, $k = \overline{1, n}$.

Далі, як і у випадку локально ліпшицевих відображень $f_k$ і $g_k$, $k = \overline{1, n}$, розглянемо банахів простір $X$, обмежену замкнену опуклу множину $Y$ всіх функцій $x \in X$, для яких $x(t) \in B(y, r)$ для всіх $t \ge a$, і оператор $\mathfrak{A} : X \to X$, визначений за допомогою рівності (9). Із (7) і (9) випливає, що $\mathfrak{A} Y \subset Y$.

Розглянемо функцію

$$\delta(t) = L\left(\int_t^{+\infty} (s - t)\sum_{k=1}^n p_k(s)\,ds + \sum_{s \in (t, +\infty) \cap T} (s - t)\sum_{k=1}^n q_k(s)\right),$$

де

$$L = \max_{k = \overline{1,n}} \left\{ \sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n \in B(y, r)} \|f_k(x_0, x_1, \ldots, x_n)\|_E, \right.$$

$$\left. \sup_{x_0, x_1, \ldots, x_n \in B(y, r)} \|g_k(x_0, x_1, \ldots, x_n)\|_E \right\}.$$

Для кожного $y \in Y$

$$\sup_{t \in [a, +\infty) \setminus T} \left\| \frac{d(\mathfrak{A}y)(t)}{dt} \right\|_E \le$$

$$\le \int_a^{+\infty} \sum_{k=1}^n p_k(s) \left\| f_k\big(y(s), (\mathcal{T}_{\tau_1} y)(s), \ldots, (\mathcal{T}_{\tau_n} y)(s)\big) \right\|_E ds +$$

$$+ \sum_{s \in (a, +\infty) \cap T} \sum_{k=1}^n q_k(s) \left\| g_k\big(y(s), (\mathcal{T}_{\tau_1} y)(s), \ldots, (\mathcal{T}_{\tau_n} y)(s)\big) \right\|_E \le$$

$$\le L\left(\int_a^{+\infty} \sum_{k=1}^n p_k(s)\,ds + \sum_{s \in (a, +\infty) \cap T} \sum_{k=1}^n q_k(s)\right) < +\infty.$$

Тому функції $z = z(t)$ із $\mathfrak{A} Y$ рівностепенево неперервні на $[a, +\infty)$. Оскільки для цих функцій також

$$\| z(t) - y \|_E \le \delta(t), \qquad t \ge a,$$

і

$$\lim_{t \to +\infty} \delta(t) = 0,$$

то на підставі узагальненої теореми Арцела [8, с. 110] множина $\mathfrak{A} Y$ є відносно компактною.

Отже, відображення $\mathfrak{A} : Y \to Y$ цілком неперервне. Згідно з теоремою Шаудера про нерухому точку [9, с. 37] відображення $\mathfrak{A}$ має в $Y$ нерухому точку. Таким чином, рівняння (6) має розв'язок $z \in Y$, який буде розв'язком і системи (1) при $t \geq a$.

Теорему 2 доведено.

**3. Коментарі до другої та третьої умов теореми 1.** Із обмежень на $E_1$ випливає, що банахів простір $E$ можна подати у вигляді $E = E_1 + Y$, де $Y$ — дійсний одновимірний підпростір простору $E$. Нехай $P_1$ — проектор на $E_1$ паралельно $Y$ і $P_2$ — проектор на $Y$ паралельно $E_1$.

Наведемо умови, що забезпечують виконання другої та третьої умов теореми 1.

Вважатимемо, що

$$f_k(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} f_{kj}(x_j)$$

і

$$g_k(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} g_{kj}(x_j)$$

для всіх $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$, де $f_{kj} : E \to E$ і $g_{kj} : E \to E$ — неперервні відображення, для яких

$$P_2 f_{kj}(x) = P_2 f_{kj}(P_2 x),$$

$$P_2 g_{kj}(x) = P_2 g_{kj}(P_2 x),$$

$$f_{kj} E_i \subset E_i$$

і

$$g_{kj} E_i \subset E_i$$

для всіх $x \in E$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, n}$ та $i = \overline{1, 3}$.

Візьмемо довільний ненульовий елемент простору $b \in Y$ і розглянемо функції

$$\alpha_{kj}(s) = \left\| P_2 f_{kj}(sb) \right\|_E, \qquad \beta_{kj}(s) = \left\| P_2 f_{kj}(-sb) \right\|_E,$$

$$\gamma_{kj}(s) = \left\| P_2 g_{kj}(sb) \right\|_E, \qquad \delta_{kj}(s) = \left\| P_2 g_{kj}(-sb) \right\|_E,$$

де $s > 0$, $k = \overline{1, n}$ і $j = \overline{0, n}$.

Друга умова теореми 1 виконується, якщо, наприклад, розглянуті функції $\alpha_{kj}(s)$, $\beta_{kj}(s)$, $\gamma_{kj}(s)$ і $\delta_{kj}(s)$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, n}$, є зростаючими на $(0, +\infty)$.

При таких припущеннях виконується і третя умова теореми 1, якщо додатково збігаються невласні інтеграли

$$\int_1^{+\infty} \frac{ds}{\alpha_{kj}(s)}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{ds}{\beta_{kj}(s)}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{ds}{\gamma_{kj}(s)}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{ds}{\delta_{kj}(s)}, \qquad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Зауважимо, що збіжність невласного інтеграла $\int_{s_0}^{+\infty} \frac{ds}{\nu(s)}$, де $\nu(s)$ — неперервна і зростаюча на $[s_0, +\infty)$ функція із значеннями в $(0, +\infty)$, забезпечує збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta s_{n-1}}{\nu(s_n)}$$

для кожної неспадної послідовності $s_0, s_1, s_2, \ldots,$ оскільки

$$\int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{ds}{\nu(s)} \geq \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{ds}{\nu(s_n)} = \frac{\Delta s_{n-1}}{\nu(s_n)} \geq 0, \qquad n \geq 1.$$


1. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків диференціальних і диференціально-різницевих рівнянь в банаховому просторі // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – С. 66–70.
2. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією в банаховому просторі // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – С. 174–178.
3. *Слюсарчук В. Ю.* Достатні умови осциляції траєкторій імпульсних систем з нефіксованими моментами імпульсної дії // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 192–197.
4. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків різницевого рівняння $\Delta^2 x(n) + \sum_{k=1}^{m} p_k(n) g_k(x(n)) = 0$ в банаховому просторі // Системи еволюційних рівнянь з післядією: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – С. 98–102.
5. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Мат. міжнар. мат. конф., присв. пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 269–275.
6. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия осцилляции решений нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 98–109.
7. *Ушаков Р. Р., Хацет В. І.* Опуклі функції та нерівності. – Київ: Вища шк., 1986. – 112 с.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
9. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.


Одержано 12.01.2002