УДК 517.5

Б. В. Винницький, В. Л. Шаран (Дрогобиц. пед. ун-т)

ПРО НУЛІ ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ У ПІВПЛОЩИНІ

We describe sequences of zeros of functions $f \not\equiv 0$ analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ and satisfying the condition

$$(\exists \tau_1 \in (0;1))\,(\exists c_1 > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \le c_1 \exp\left(\eta^{\tau_1}(c_1|z|)\right)$$

where $\eta : [0;+\infty) \to (0;+\infty)$ is an increasing function such that the function $\ln \eta(r)$ is convex with respect to $\ln r$ on $[1;+\infty)$.

Наведено опис послідовностей нулів аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову

$$(\exists \tau_1 \in (0;1))\,(\exists c_1 > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \le c_1 \exp\left(\eta^{\tau_1}(c_1|z|)\right),$$

де $\eta : [0;+\infty) \to (0;+\infty)$ — зростаюча функція така, що функція $\ln \eta(r)$ є опуклою відносно $\ln r$ на $[1;+\infty)$.

Питання про опис послідовностей нулів аналітичних у півплощині функцій скінченного порядку досліджувалось у роботах багатьох авторів [1 – 8]. Випадок аналітичних у півплощині функцій нескінченного порядку розглядався в роботі [9].

Дану роботу присвячено опису послідовностей нулів визначеного нижче класу B_η, який можна розглядати як узагальнення класу аналітичних у півплощині функцій порядку меншого від заданого.

Нехай (λ_n) — довільна послідовність різних комплексних чисел, які лежать у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $\eta : [0;+\infty) \to (0;+\infty)$ — зростаюча функція така, що функція $\ln \eta(r)$ є опуклою відносно $\ln r$ на $[1;+\infty)$, а B_η — клас аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову

$$(\exists \tau_1 \in (0;1))\,(\exists c_1 > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \le c_1 \exp\left(\eta^{\tau_1}(c_1|z|)\right). \tag{1}$$

Доведемо таке твердження.

Теорема 1. *Для того щоб існувала функція $f \in B_\eta$, яка має нулі в усіх точках λ_n, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \tag{2}$$

$$(\exists \tau_2 \in (0;1))\,(\exists c_2 > 0)\,(\forall r \ge 1) : S(r) \le \frac{\eta^{\tau_2}(c_2 r)}{r} + c_2, \tag{3}$$

де

$$S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

Із доведення теореми 1 буде видно, що справедливе і наступне **твердження**.

Для того щоб послідовність (λ_n) була послідовністю нулів деякої функції $f \in B_\eta$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови (2) *і* (3).

Відмітимо, що опис послідовностей нулів класу цілих функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову (1), отримано в [10].

Для доведення теореми 1 будуть потрібні допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо функція* $\ln \eta(r)$ *є опуклою відносно* $\ln r$ *на* $[1; +\infty)$, *то*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln \eta(r)}{\ln r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{r\eta'(r)}{\eta(r)} = \gamma_0 \in (0; +\infty], \tag{4}$$

де η' *— права похідна функції* η.

Доведення. Із опуклості функції $\ln \eta(r)$ відносно $\ln r$ на $[1; +\infty)$ випливає існування скінченних або нескінченних границь

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln \eta(r)}{\ln r} \quad \text{і} \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{r\eta'(r)}{\eta(r)}.$$

Використавши правило Лопіталя (його можна використовувати, оскільки функція $\ln \eta(r)$ є абсолютно неперервною), отримаємо (4).

Лема 2. *Якщо функція* $\ln \eta(r)$ *є опуклою відносно* $\ln r$ *на* $[1; +\infty)$, *то умова* (3) *рівносильна кожній з таких умов*:

$$(\exists \tau_3 \in (0;1))\,(\exists c_3 > 0)\,(\forall r \geq 1):\; S_0(r) \leq \frac{\eta^{\tau_3}(c_3 r)}{r} + c_3, \tag{5}$$

$$(\exists \tau_4 \in (0;1))\,(\exists c_4 > 0)\,(\forall r \geq 1):\; s(r) \leq \eta^{\tau_4}(c_4 r) + c_4, \tag{6}$$

де

$$S_0(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leq r} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}, \quad s(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leq r} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

Доведення. Рівносильність умов (3) і (6) випливає із нерівності [5, с. 490]

$$S(r) \leq S_0(r) \leq \frac{4}{3} S(2r).$$

Доведемо тепер рівносильність умов (3) і (6). Якщо виконується (3), то (6) випливає із нерівності [5, с. 484]

$$S(2r) \geq \frac{3s(r)}{4r}.$$

Нехай тепер виконується умова (6). Оскільки [11, с. 58]

$$S(r) = \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{r^2}\right) s(t)\,dt, \tag{7}$$

то враховуючи (6), отримуємо

$$S(r) \leq \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{r^2}\right) \eta^{\tau_4}(c_4 t)\,dt + c_5. \tag{8}$$

Якщо $\gamma_0 > 1$, то використавши правило Лопіталя, із (8) отримаємо (3). Якщо ж $\gamma_0 \leq 1$, то $\eta(r) = r^{\gamma_0(1+o(1))}$ при $r \to +\infty$. Тоді умова (6) рівносильна умові

$$(\exists c_6 > 0)\,(\exists \gamma_1 < \gamma_0)\,(\forall r \geq 1):\; s(r) \leq r^{\gamma_1} + c_6,$$

а умова (3) — умові

$$S(r) = O(1), \quad r \in [1; +\infty).$$

Враховуючи це, із (7) отримуємо, що у випадку $\gamma_0 \leq 1$ із (3) також випливає *(6)*. Отже, умови (3) і (6) є еквівалентними.

Лема 3. *Нехай функція $f \not\equiv 0$, яка має нулі в точках $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і обмеженою в кожному півкрузі $Q_R = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$, $0 < R < +\infty$. Тоді для всіх $r \in [1; +\infty)$*

$$\sum_{|\lambda_n| \le r} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \tag{9}$$

$$S(r) \le \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln \left| f(re^{i\varphi}) \right| \cos \varphi \, d\varphi + $$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |f(it) f(-it)| \, dt + c_7, \tag{10}$$

де $f(it)$ — кутові граничні значення функції f на $\partial\mathbb{C}_+$.

Це твердження міститься в [4, с. 26] (в [4] відповідні результати сформульовано для верхньої півплощини). Зауважимо, що (9) встановлено в [4] при доведенні теореми 2.1, а для отримання (10) потрібно врахувати монотонність сингулярної граничної функції.

***Доведення теореми* 1.** *Достатність.* 1. Якщо $\gamma_0 \le 1$, то $\eta(r) = r^{\gamma_0(1+o(1))}$ при $r \to +\infty$. Тоді клас B_η збігається з класом аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову

$$(\exists \gamma_2 < \gamma_0)\,(\exists c_1' > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : \; |f(z)| \le c_1' \exp\left(|z|^{\gamma_2}\right), \tag{11}$$

а умова (3) рівносильна умові

$$S(r) = O(1), \quad r \in [1; +\infty),$$

тобто умові (оскільки умова (3) рівносильна умові (5))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} < +\infty. \tag{12}$$

Якщо виконуються умови (2) і (12), то [4, с. 30] функція

$$f(z) = \prod_{|\lambda_n| \le 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n}$$

є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і задовольняє умову (11).

2. Якщо $1 < \gamma_0 < +\infty$, то $\eta(r) = r^{\gamma_0(1+o(1))}$ при $r \to +\infty$. Тоді клас B_η збігається з класом аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову

$$(\exists \gamma_3 < \gamma_0)\,(\exists c_1'' > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : \; |f(z)| \le c_1'' \exp\left(|z|^{\gamma_3}\right), \tag{13}$$

а умова (3) рівносильна умові

$$(\exists \gamma_4 < \gamma_0)\,(\exists c_8 > 0)\,(\forall r \ge 1) : \; S(r) \le r^{\gamma_4 - 1} + c_8. \tag{14}$$

Якщо виконуються умови (2) і (14), то [4, с. 35] функція

$$f(z) = \prod_{|\lambda_n| \le 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n} \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j} \left(\frac{1}{\lambda_n^j} + \frac{(-1)^{j+1}}{\bar{\lambda}_n^j} \right) \right\}, \quad p = [\gamma_4],$$

де $[x]$ — ціла частина числа x, є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і задовольняє умову (13).

3. Нехай тепер $\gamma_0 = +\infty$. Розглянемо функцію

$$G(z) = \prod_{|\lambda_n|>1} W_n(z), \qquad W_n(z) = \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\bar{\lambda}_n} \exp\left\{\sum_{j=1}^{p_n-1} \frac{z^j}{j}\left(\frac{1}{\lambda_n^j} + \frac{(-1)^{j+1}}{\bar{\lambda}_n^j}\right)\right\},$$

де (p_n) — послідовність натуральних чисел, яку ми виберемо нижче. Відомо [4, с. 35], що при $|\lambda_n| \le 2|z|$

$$\ln|W_n(z)| \le 2\left(\frac{2|z|}{|\lambda_n|}\right)^{p_n} \cos\varphi_n, \tag{15}$$

а при $|\lambda_n| > 2|z|$

$$|\ln W_n(z)| \le 4\left(\frac{|z|}{|\lambda_n|}\right)^{p_n+1} \cos\varphi_n. \tag{16}$$

Очевидно, при $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$

$$\ln|G(z)| = \sum_{1<|\lambda_n|\le 2r} \ln|W_n(z)| + \sum_{|\lambda_n|>2r} \ln|W_n(z)|. \tag{17}$$

Враховуючи (15) і (16), із (17) отримуємо

$$\ln|G(z)| \le 2\sum_{1<|\lambda_n|\le 2r} \left(\frac{2r}{|\lambda_n|}\right)^{p_n-1} \cos\varphi_n +$$

$$+ 4\sum_{|\lambda_n|>2r} \left(\frac{r}{|\lambda_n|}\right)^{p_n} \cos\varphi_n \le 4\sum_{|\lambda_n|>1} \left(\frac{2r}{|\lambda_n|}\right)^{p_n} \cos\varphi_n. \tag{18}$$

Побудуємо послідовність (p_n) так, щоб ряд

$$\sum_{|\lambda_n|>1} \left(\frac{2r}{|\lambda_n|}\right)^{p_n} \cos\varphi_n$$

збігався. Тоді із (18) буде випливати рівномірна збіжність добутку G на компактах із $\mathbb{C}_+$ і, таким чином, G буде аналітичною в $\mathbb{C}_+$ функцією.

Нехай $M_\theta(r) = \max\{|\theta(z)| : |z| = r\}$ і $\mu_\theta(r) = \max\{|\theta_n| r^n : n \ge 0\}$ — відповідно максимум модуля та максимальний член цілої функції θ з тейлорівськими коефіцієнтами θ_n. Виберемо числа Δ_0 і τ_0 так, щоб $\tau_2 < \Delta_0 < \tau_0 < 1$, і нехай $c_0 = 4c_2$, $\Delta = \tau_0/\Delta_0$. Тоді $\Delta > 1$. Оскільки $\Delta_0 \ln\eta(c_0 r)$ є опуклою відносно $\ln r$ і $\ln r = o(\Delta_0 \ln\eta(c_0 r))$, то [12] існує ціла функція ψ така, що

$$\Delta_0 \ln\eta(c_0 r) = (1+o(1)) \ln M_\psi(r), \qquad r \to +\infty. \tag{19}$$

Відомо, що для кожної цілої функції ψ і для довільних $r > 0$ і $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності

$$\mu_\psi(r) \le M_\psi(r) \le (1 + 1/\varepsilon)\mu_\psi((1+\varepsilon)r). \tag{20}$$

Тоді із (19) і (20) маємо

$$\tau_0 \ln\eta(c_0 r) = \Delta\Delta_0 \ln\eta(c_0 r) = \Delta(1+o(1)) \ln M_\psi(r) \ge \ln\mu_\psi(r), \quad r \to +\infty,$$

$$\tau_0 \ln\eta(c_0 r) = \Delta(1+o(1)) \ln M_\psi(r) \le$$

$$\le \tau_0/\tau_5 \ln\mu_\psi(2r), \quad r \to +\infty, \quad \tau_2 < \tau_5 < \Delta_0 < \tau_0 < 1.$$

Отже,

$$\mu_\psi(r) \le \eta^{\tau_0}(c_0 r), \quad \mu_\psi(r) \ge \eta^{\tau_5}(c_0 r/2), \quad r \ge r_0. \tag{21}$$

Нехай $\hat{\psi}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\psi}_n z^n$ — мажоранта Ньютона [13] функції ψ, $\kappa_n(\hat{\psi}) = |\hat{\psi}_{n-1}|/|\hat{\psi}_n|$ при $n \ge 1$ і $\kappa_0(\hat{\psi}) = 0$. Відомо [14], що $\mu_{\hat{\psi}}(r) = \mu_\psi(r)$, послідовність $\kappa_n(\hat{\psi})$ є неспадною, $\kappa_n(\hat{\psi}) \to +\infty$ і $\mu_{\hat{\psi}}(r) = |\hat{\psi}_n| r^n$ при $\kappa_n(\hat{\psi}) \le r \le \kappa_{n+1}(\hat{\psi})$. Виберемо p_n так, щоб $\kappa_{p_n}(\hat{\psi}) \le |\lambda_n| < \kappa_{p_n+1}(\hat{\psi})$. Тоді $\hat{\psi}_{p_n} |\lambda_n|^{p_n} = \mu_{\hat{\psi}}(|\lambda_n|)$, $\hat{\psi}_{p_n} r^{p_n} \le \mu_{\hat{\psi}}(r)$, $r > 0$. Враховуючи (20) і (21), маємо

$$\sum_{|\lambda_n|>1} \left(\frac{2r}{|\lambda_n|}\right)^{p_n} \cos\varphi_n = \sum_{|\lambda_n|>1} \frac{\hat{\psi}_{p_n}(2r)^{p_n}}{\hat{\psi}_{p_n}|\lambda_n|^{p_n}} \cos\varphi_n \le$$

$$\le \sum_{|\lambda_n|>1} \frac{\mu_{\hat{\psi}}(2r)}{\mu_{\hat{\psi}}(|\lambda_n|)} \cos\varphi_n \le \sum_{|\lambda_n|>1} \frac{\eta^{\tau_0}(2c_0 r)}{\eta^{\tau_5}(c_0|\lambda_n|/2)} \cos\varphi_n. \tag{22}$$

Таким чином, із (6), (18) і (22) отримуємо

$$\ln|G(z)| \le 4 \sum_{|\lambda_n|>1} \frac{\eta^{\tau_0}(2c_0 r)}{\eta^{\tau_5}(c_0|\lambda_n|/2)} \cos\varphi_n = 4\eta^{\tau_0}(8c_2 r) \int_1^{+\infty} \frac{ds(t)}{\eta^{\tau_5}(2c_2 t)} \le$$

$$\le 4\eta^{\tau_0}(8c_2 r)\left(c_9 + c_{10} \int_1^{+\infty} \frac{\eta'(2c_2 t)}{\eta^{\tau_5-\tau_2+1}(2c_2 t)} dt\right). \tag{23}$$

Оскільки $\tau_5 > \tau_2$, то останній інтеграл збіжний. Тому G є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ функцією і

$$|G(z)| \le c_{11} \exp(\eta^{\tau_0}(8c_2 r)), \quad z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+. \tag{24}$$

Позначимо

$$f(z) = G_1(z)\,G(z),$$

де

$$G_1(z) = \prod_{|\lambda_n|\le 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n}.$$

Із (2) випливає [4, с. 30], що функція G_1 є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і $|G_1(z)| \le 1$ при $z \in \mathbb{C}_+$. Тому, враховуючи (24), робимо висновок, що функція f належить до класу B_η і задовольняє умови теореми 1.

Необхідність. Нехай існує функція f із класу B_η така, що $f(\lambda_n) = 0$. Тоді вона обмежена в кожному півкрузі Q_R. Тому [15, с. 182] має майже скрізь на уявній осі кутові граничні значення $f(iy)$, причому $|f(iy)| \le c_1 \exp(\eta^{\tau_1}(c_1|y|))$ для майже всіх $y \in \mathbb{R}$. Тому із леми 1 отримуємо (2) і

$$S(r) \le \frac{1}{\pi} \int_1^r \frac{\eta^{\tau_1}(c_1 t)}{t^2} dt + \frac{2\eta^{\tau_1}(c_1 r)}{\pi r} + c_{13}. \tag{25}$$

Якщо $\gamma_0 \le 1$, то $\int_1^r \frac{\eta^{\tau_1}(c_1 t)}{t^2} dt = O(1)$ при $r \in [1; +\infty)$. Якщо $\gamma_0 > 1$, то використовуючи правило Лопіталя і (4), маємо